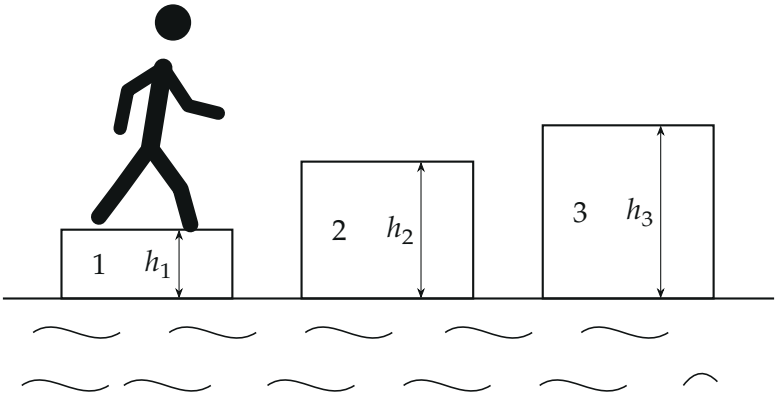
Три айсберга и человек

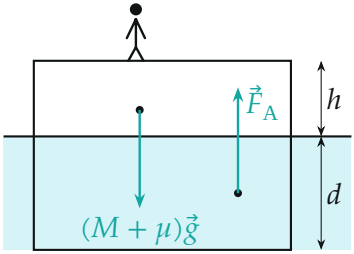
Задача 2. [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 2] В соленом океане плавают три небольших айсберга 1, 2 и 3, как показано на рисунке (масштабы соблюдены не везде). Каждый из них имеет форму прямоугольного параллелепипеда. На айсберге 1 стоит человек. Площади поверхностей верхних граней у этих айсбергов одинаковы, а высоты надводных частей равны $h_1 = 5$ см, $h_2 = 10$ см и $h_3 = 12$ см соответственно. Когда человек перешёл с айсберга 1 на айсберг 2, то при равновесии поверхности айсбергов 1 и 2 оказались на одинаковой высоте над уровнем воды. После этого человек перешёл с айсберга 2 на айсберг 3. Определите, какими после этого стали высоты надводных частей каждого из айсбергов, когда вновь наступило равновесие.



▲ **Решение. Что происходит.** Каждый айсберг плавает, то есть сила Архимеда равна полному весу айсберга (вместе с человеком, если он стоит на нём). Площади одинаковы, поэтому глубина погружения прямо пропорциональна массе. Когда человек переходит с одного айсберга на другой, один айсберг теряет его вес и всплывает, другой получает и погружается — ровно на одну и ту же глубину Δ. Класс задачи: плавание тел, закон Архимеда.

Обозначения. S — площадь верхней грани (у всех одинакова), ρ — плотность солёной воды, μ — масса человека, M_i — масса i-го айсберга,

H_i — его полная высота, d_i — глубина подводной части, $h_i = H_i - d_i$ — высота надводной части.



Силы на айсберг с человеком: сила тяжести приложена в центре масс системы, сила Архимеда — в центре подводной части.

1. Условие плавания. Айсберг (с человеком) покоится, сумма сил равна нулю: сила тяжести вниз, сила Архимеда вверх. Сила Архимеда равна весу вытесненной воды $\rho g\, Sd$ (параллелепипед, объём подводной части Sd):

$$\rho g S d_i = (M_i + \mu_i)\, g \quad \Rightarrow \quad d_i = \frac{M_i + \mu_i}{\rho S},$$

где $\mu_i = \mu$ для айсберга с человеком и $\mu_i = 0$ для остальных. Глубина погружения пропорциональна полной массе, а ρS у всех одинаково.

2. Что даёт переход человека. Масса айсберга, который человек покидает, уменьшается на μ, а того, на который он встаёт, увеличивается на μ. По формуле шага 1 глубина погружения первого меняется на $-\Delta$, второго на $+\Delta$, где

$$\Delta = \frac{\mu}{\rho S}$$

— одна и та же величина для любой пары (из-за равных S). Полная высота айсберга H_i не меняется, поэтому $h_i = H_i - d_i$: надводная часть первого *растёт* на Δ, второго *убывает* на Δ.

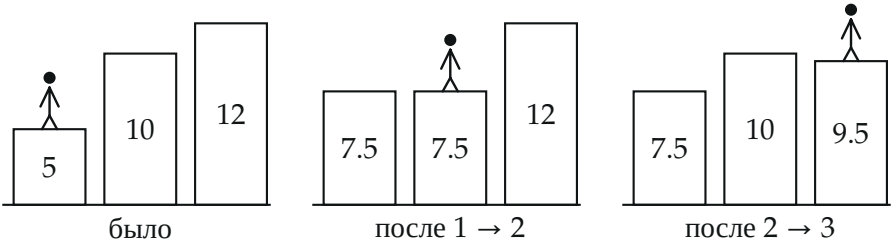
3. Первый переход ($1 \to 2$**).** Было $h_1 = 5$ см, $h_2 = 10$ см. После перехода $h_1' = h_1 + \Delta$, $h_2' = h_2 - \Delta$. Поверхности на одной высоте,

значит $h'_1 = h'_2$:

$$h_1 + \Delta = h_2 - \Delta \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{h_2 - h_1}{2} = \frac{10 - 5}{2} = 2{,}5 \text{ см}.$$

Тогда $h'_1 = h'_2 = 5 + 2{,}5 = 7{,}5$ см. Айсберг 3 не затронут: $h_3 = 12$ см.

4. Второй переход (2 → 3). Человек уходит со второго: $h''_2 = h'_2 + \Delta = 7{,}5 + 2{,}5 = 10$ см. Встаёт на третий: $h''_3 = h_3 - \Delta = 12 - 2{,}5 = 9{,}5$ см. Первый не затронут: $h''_1 = h'_1 = 7{,}5$ см.



Надводные высоты h_1, h_2, h_3 в сантиметрах (в масштабе); человек — на первом, втором, третьем айсберге соответственно.

Обратите внимание. Не нужно знать ни массу человека, ни плотность воды, ни площадь: они входят только в $\Delta = \mu/(\rho S)$, а Δ находится из условия «поверхности на одном уровне». Равенство площадей — главное условие, из-за него Δ одинакова для всех трёх айсбергов.

Проверка. Второй способ: полный вес всех трёх айсбергов вместе с человеком не меняется, значит, не меняется и суммарная глубина погружения, а с ней и сумма надводных высот. Было $5+10+12 = 27$ см, стало $7{,}5 + 10 + 9{,}5 = 27$ см. Размерность: Δ — см. Смысл: человек «переливает» айсбергам одну и ту же порцию осадки $\Delta = 2{,}5$ см, и на каждом шаге один айсберг всплывает на столько же, на сколько тонет другой.

Ответ. $h_1 = 7{,}5$ см, $h_2 = 10$ см, $h_3 = 9{,}5$ см.