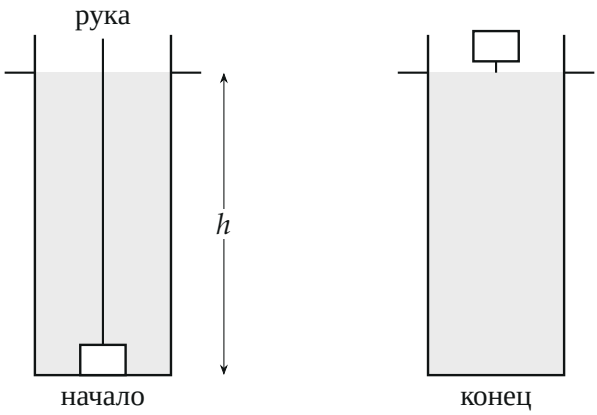
# КПД бабы Дуси и колодец

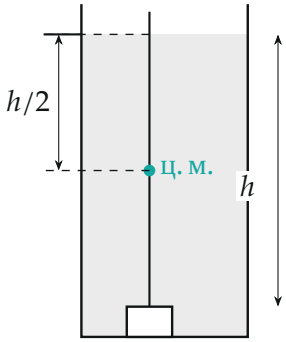
**Задача 3.** [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 3] Баба Дуся поднимает на цепи из колодца глубиной $h = 10$ м ведро с водой. Масса пустого ведра без воды равна $m_1 = 0{,}5$ кг, масса цепи длиной $h$ равна $m_2 = 2$ кг, а масса воды, поднимаемой в ведре, равна $M = 8$ кг. Скорость ведра в конце подъёма равна нулю. Снимая ведро с цепи, баба Дуся случайно проливает $k = 20\%$ находящейся в нём воды обратно в колодец. Найдите КПД бабы Дуси в процессе подъёма воды. Цепь однородна. Полезной считается величина, равная изменению потенциальной энергии доставленной наверх воды, которая в итоге осталась в ведре. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с$^2$.




*Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): ведро на цепи в начале и в конце подъёма.*

▲ **Решение. Что происходит.** Баба Дуся тянет медленно и без трения, поэтому её работа целиком идёт на прирост потенциальной энергии всего, что подняли: воды, ведра и цепи. Скорость в начале и в конце равна нулю, кинетическая энергия не меняется. Полезна только часть: вода, которая осталась в ведре после проливания. КПД — отношение полезной работы ко всей. Класс задачи: закон сохранения энергии, работа и КПД; хитрость в том, что центр масс цепи поднимается лишь на $h/2$.

**Обозначения.** $A$ — работа бабы Дуси за подъём, $A_{\text{пол}}$ — полезная работа, $\eta = A_{\text{пол}}/A$.




*Начало подъёма: цепь висит вдоль всей шахты, её центр масс — на глубине $h/2$. В конце цепь лежит наверху, центр масс на уровне края.*

**1. Закон.** Работа силы руки равна изменению полной механической энергии системы «вода + ведро + цепь»: $A = \Delta E_{\text{п}} + \Delta E_{\text{к}}$, причём $\Delta E_{\text{к}} = 0$ (скорость в начале и в конце равна нулю), трения нет. Ось $y$ вверх, нулевой уровень — край колодца. Проливание воды происходит уже после подъёма, поэтому на работу $A$ не влияет.

**2. Вода и ведро.** Они поднимаются целиком на высоту $h$:

$$\Delta E_{\text{в+в}} = (M + m_1)gh = (8 + 0{,}5) \cdot 10 \cdot 10 = 850 \text{ Дж}.$$

**3. Цепь.** Цепь однородна, в начале висит вдоль всей шахты: её центр масс на глубине $h/2$. В конце цепь лежит наверху, центр масс на уровне края. Значит, центр масс поднялся на $h/2$:

$$\Delta E_{\text{ц}} = m_2 g \frac{h}{2} = 2 \cdot 10 \cdot 5 = 100 \text{ Дж}.$$

Почему $h/2$: кусочек цепи, висевший на глубине $x$, поднимается на $x$, а $x$ распределены равномерно от 0 до $h$ — среднее значение $h/2$.

**4. Работа.**

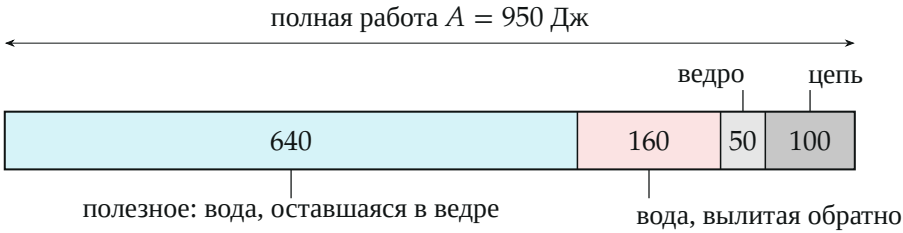
$$A = \Delta E_{\text{в+в}} + \Delta E_{\text{ц}} = 850 + 100 = 950 \text{ Дж}.$$

**5. Полезная часть.** Проливается $k = 20\%$ воды, остаётся $(1-k)M = 0{,}8 \cdot 8 = 6{,}4$ кг. Их потенциальная энергия выросла на

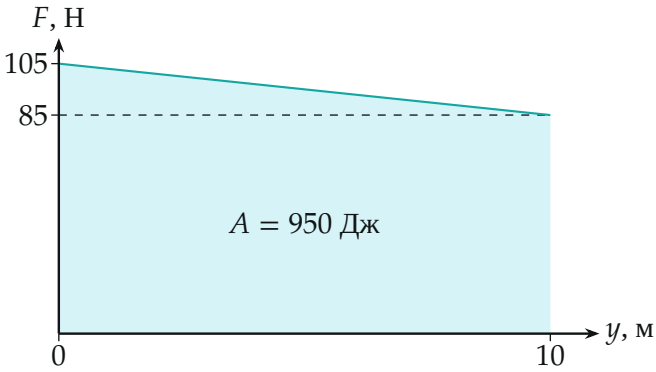
$$A_{\text{пол}} = (1-k)Mgh = 6{,}4 \cdot 10 \cdot 10 = 640 \text{ Дж}.$$

**6. КПД.**

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{(1-k)Mgh}{(M+m_1)gh + m_2 gh/2} = \frac{640}{950} \approx 0{,}674 = 67{,}4\%.$$




*Куда пошла работа $A = 950$ Дж (числа — в джоулях, в масштабе): полезно только 640 Дж.*




*Сила руки при подъёме ведра: от 105 Н до 85 Н; площадь под графиком — работа $A$.*

**Проверка (второй способ).** Пусть ведро поднято на $y$ от дна. Свисает цепь длиной $h - y$ (остальная лежит у руки), поэтому сила руки $F(y) =$

$(M + m_1)g + m_2 g\,(h - y)/h$: от 105 Н до 85 Н. Работа — площадь под графиком $F(y)$: $(105 + 85)/2 \cdot 10 = 950$ Дж — та же $A$. Размерность: джоули, $\eta < 1$. Предельный случай невесомой цепи: $\eta = 640/850 \approx 75\%$ — больше, как и должно быть без лишней нагрузки.

**Обратите внимание.** Центр масс цепи поднимается на $h/2$, а не на $h$: если взять $h$, получится $A = 1050$ Дж и неверный КПД 61%. Полезной считается только вода, оставшаяся в ведре, — 640 Дж, а не 800 Дж; ведро и цепь работы не «делают» полезной, но подняты вместе с водой.

**Ответ.** $\eta = \dfrac{(1-k)Mgh}{(M+m_1)gh + m_2 gh/2} = \dfrac{640}{950} \approx 67{,}4\%.$