Таблица КПД двигателя Глюка

Задача 4. [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 4] Экспериментатор Глюк опытным путем получил зависимость коэффициента полезного действия η нового двигателя от температур поступающего в него топлива $t_т$ и окружающего воздуха $t_в$. Проанализировав результаты этого эксперимента, теоретик Баг обратил внимание на то, что КПД пропорционален разности удвоенной температуры топлива и утроенной температуры воздуха: $\eta = \alpha(2t_т - 3t_в)$, где α – положительный коэффициент.

Публикуя результаты о сенсационном изобретении Глюка, редактор научного журнала Фейк случайно поменял местами строки с численными данными в таблице измерений, и она стала выглядеть так:

η, %	60	64	66	68	69	70	71	72	95	100
$t_т$, °C	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
$t_в$, °C	12	13	12	11	9	7	5	3	23	25

1. Восстановите первоначальный вид таблицы.
2. В предположении, что гипотеза Бага верна, определите максимально возможный КПД двигателя Глюка, работающего при любых температурах воздуха и топлива, не выходящих за диапазон температур, приведенных в исходной таблице Глюка.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Гипотеза Бага говорит: отношение $\eta/(2t_т - 3t_в)$ одинаково во всех опытах, α — один и тот же положительный коэффициент. Редактор переставил *строки данных*, а подписи слева остались на местах. Три строки чисел можно разложить по трём ролям (КПД, температура топлива, температура воздуха) шестью способами; верен тот, при котором отношение постоянно. Потом остаётся найти наибольшее значение линейной функции на прямоугольнике температур.

Обозначения. Чтобы не путать с подписями таблицы, строки данных называем по их числам: $A = (60, 64, \ldots, 100)$, $B = (32, 34, \ldots, 50)$, $C = (12, 13, \ldots, 3, 23, 25)$, как напечатано сверху вниз. $t_т$ — температура топлива, $t_в$ — температура воздуха, $x = 2t_т - 3t_в$.

Пункт 1. Восстановление таблицы.

1. Условия отбора. Раз $\alpha > 0$ и $\eta > 0$, нужно $x = 2t_т - 3t_в > 0$ в каждом опыте. Для каждого из шести способов проверяем первый столбец, где x легко получить, и затем второй.

2. Перебор шести способов (КПД, топливо, воздух):

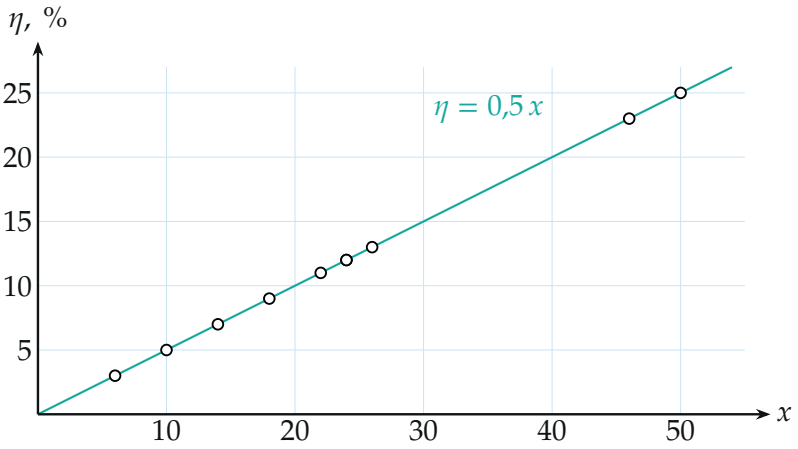
- (A, B, C): $x = 2 \cdot 32 - 3 \cdot 12 = 28$, $\alpha = 60/28 \approx 2{,}14$; во втором столбце $64/(2 \cdot 34 - 3 \cdot 13) = 64/29 \approx 2{,}21$ — не равно, способ не годится.
- (A, C, B): $x = 2 \cdot 12 - 3 \cdot 32 = -72 < 0$ — не годится.
- (B, A, C): $x = 2 \cdot 60 - 3 \cdot 12 = 84$, $\alpha = 32/84$; во втором столбце $34/(2 \cdot 64 - 3 \cdot 13) = 34/89$ — не равно, не годится.
- (B, C, A): $x = 2 \cdot 12 - 3 \cdot 60 < 0$ — не годится.
- (C, A, B): $x = 2 \cdot 60 - 3 \cdot 32 = 24$, $\alpha = 12/24 = 0{,}50$; во втором столбце $13/(2 \cdot 64 - 3 \cdot 34) = 13/26 = 0{,}50$ — подходит.
- (C, B, A): $x = 2 \cdot 32 - 3 \cdot 60 < 0$ — не годится.

Проверка равенства дробей во втором способе (B, A, C): $32 \cdot 89 = 2848$, а $34 \cdot 84 = 2856$ — отличаются, значит α не постоянна.

3. Единственный способ (C, A, B): КПД — третья строка (строка «η» в таблице Фейка стоит не на месте), температура топлива — первая, температура воздуха — вторая. Проверяем все десять столбцов:

$t_т$	60	64	66	68	69	70	71	72	95	100
$t_в$	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50
$x = 2t_т - 3t_в$	24	26	24	22	18	14	10	6	46	50
η, %	12	13	12	11	9	7	5	3	23	25
$\alpha = \eta/x$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

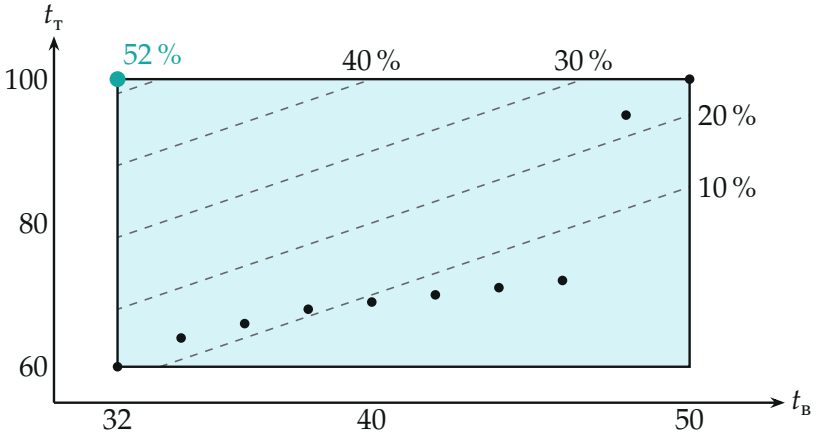
Во всех столбцах $\alpha = 0{,}50\,^\circ\text{C}^{-1}$ (проценты на градус). Восстановленная таблица: КПД $12, 13, 12, 11, 9, 7, 5, 3, 23, 25$ %; топливо $60, 64, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 95, 100$ °C; воздух $32, 34, \ldots, 46, 48, 50$ °C.



Восстановленные данные: по горизонтали $x = 2t_m - 3t_в$, по вертикали η в процентах. Все точки лежат на одной прямой $\eta = 0{,}5\,x$ через начало координат (столбцы 1 и 3 дают одну точку).

Пункт 2. Наибольший КПД.

4. Куда смотреть. Диапазон температур из таблицы: $t_т$ от 60 до 100 °C, $t_в$ от 32 до 50 °C. При $\alpha > 0$ функция $\eta = \alpha(2t_т - 3t_в)$ растёт с $t_т$ и убывает с ростом $t_в$. Значит, максимум — при самом высоком топливе и самом холодном воздухе: $t_т = 100$ °C, $t_в = 32$ °C. Эта пара температур не стоит ни в одном столбце таблицы (топливо 100 было при воздухе 50, воздух 32 — при топливе 60), но лежит в разрешённом диапазоне — и по условию такой режим допустим.



Допустимые температуры — прямоугольник; точки — опыты Глюка, пунктир — линии равного КПД 10, 20, 30, 40, 50 % *(снизу вверх). КПД растёт вверх и влево, наибольший — в левом верхнем углу,* 52 %.

5. Значение.

$$\eta_{\max} = \alpha\,(2 \cdot 100 - 3 \cdot 32) = 0{,}5 \cdot 104 = 52\%.$$

Обратите внимание. Максимум не берётся из таблицы: самое большое число в ней — 25%, но режимы вне столбцов тоже разрешены, и КПД там выше. Сначала нужна α из пункта 1, и только потом — пункт 2.

Проверка. Второй способ для пункта 2: линейная функция на прямоугольнике принимает наибольшее значение в одной из вершин. В вершинах $(t_т; t_в)$ при $\alpha = 0{,}5$:

$(t_т;\ t_в)$	$(60;32)$	$(60;50)$	$(100;32)$	$(100;50)$
η, %	12	−15	52	25

Наибольшее — 52% (вершина $(100;32)$). В официальном ответе в восьмом столбце указано $2t_т - 3t_в = 32$ — это опечатка: $2 \cdot 72 - 3 \cdot 46 = 6$, и при $\eta = 3\%$ получается тот же $\alpha = 0{,}5$.

Ответ. 1) КПД, %: 12, 13, 12, 11, 9, 7, 5, 3, 23, 25; температура топлива $t_т$, °C: 60, 64, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 95, 100; температура воздуха $t_в$, °C: 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50; $\alpha = 0{,}5$ на градус; 2) $\eta_{\max} = 52\%$.