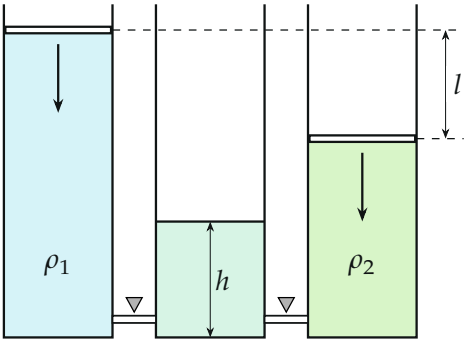
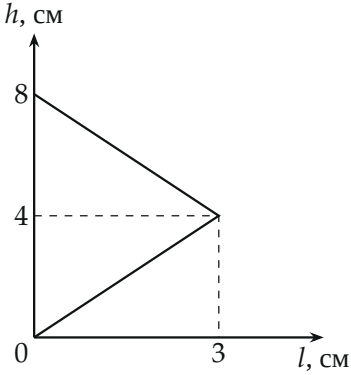
Три сосуда и две жидкости

Задача 5. [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 5] Три одинаковых вертикальных цилиндрических сосуда сообщаются при помощи узких трубок с кранами, которые первоначально перекрыты (см. рисунок слева). В левом сосуде под поршнем находится жидкость плотностью ρ_1, в правом сосуде под поршнем – жидкость с плотностью ρ_2, а средний сосуд пуст. Краны одновременно открывают, и в тот же момент начинают двигать вниз оба поршня с постоянными скоростями. Сначала разница уровней поршней по вертикали увеличивается со скоростью V. Затем, в некоторый момент, скорости поршней изменяются – они продолжают двигаться с постоянными скоростями, но теперь разница уровней поршней по вертикали уменьшается с такой же скоростью V. Пользуясь графиком зависимости высоты h уровня смеси в среднем сосуде от расстояния по вертикали l между поршнями (см. рисунок справа), найдите среднюю плотность смеси в тот момент, когда $h = 6$ см.

Можно считать, что объём смеси равен сумме объёмов жидкостей, которые перетекли из крайних сосудов.





▲ **Решение. Что происходит.** Поршни вытесняют жидкость в средний сосуд. Его уровень растёт со скоростью, равной сумме скоростей поршней (сечения одинаковы). Расстояние l между поршнями растёт или убывает со скоростью, равной разности скоростей. Сравнивая наклон графика $h(l)$ с этими двумя связями, находим скорости поршней на каждом

этапе. Дальше считаем, сколько жидкости каждого сорта набралось в среднем сосуде к моменту $h = 6$ см, и берём среднюю плотность как отношение массы к объёму. Класс задачи: сообщающиеся сосуды, кинематика и средняя плотность смеси.

Обозначения. S — сечение каждого сосуда, v_1, v_2 — скорости опускания левого и правого поршней, «быстрый» поршень — со скоростью $v_б$, «медленный» — $v_м$ (в обозначениях ниже просто a и b).

1. Связь уровня со скоростями. За малое время Δt поршни вытесняют объёмы $Sv_1\Delta t$ и $Sv_2\Delta t$ несжимаемой жидкости, и столько же прибавляется в среднем сосуде: $S\Delta h = S(v_1 + v_2)\Delta t$. Значит,

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = v_1 + v_2.$$

Разность уровней поршней l меняется со скоростью $|v_1 - v_2|$, и по условию она равна V. Вместе: $\Delta h/\Delta l = \pm(v_1 + v_2)/V$ (знак зависит от того, растёт l или убывает).

2. Что даёт график. На первой ветви l растёт от 0 до 3 см, а h — от 0 до 4 см: наклон $4/3$. На второй l убывает от 3 до 0, а h растёт от 4 до 8 см: тот же наклон по модулю, $4/3$. Поэтому на обоих этапах

$$v_1 + v_2 = \frac{4}{3}V.$$

3. Скорости поршней на первом этапе. Пусть быстрее опускается поршень a, медленнее b: $v_a - v_b = V$ (разность уровней растёт), $v_a + v_b = (4/3)V$. Складываем и вычитаем:

$$v_a = \frac{7}{6}V, \qquad v_b = \frac{1}{6}V.$$

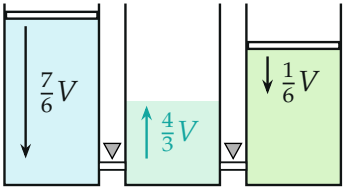
Какой из поршней быстрый — из условия не следует, поэтому рассматриваем оба случая: (1) быстрее левый (a — левый, жидкость ρ_1); (2) быстрее правый.

4. Второй этап: поршни «меняются» скоростями. Теперь l убывает: $v'_a - v'_b = -V$ (поршень a уже ниже, но теперь отстаёт), сумма та же:

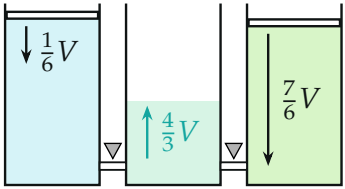
$v'_a + v'_b = (4/3)V$. Тогда

$$v'_a = \frac{1}{6}V, \qquad v'_b = \frac{7}{6}V.$$

Поршень b догоняет a и к концу этапа ($l = 0$) они снова на одном уровне.



первый этап: l растёт

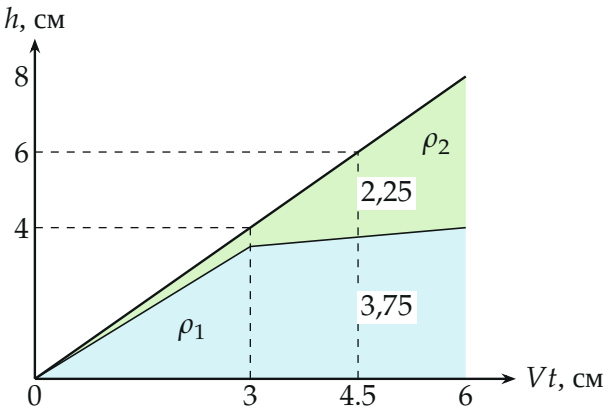


второй этап: l убывает

5. Время и объёмы. Объёмы измеряем высотой столба в среднем сосуде (S сокращается). Первый этап: l растёт на 3 см со скоростью V, длится $t_1 = 3\text{ см}/V$. За это время в средний сосуд перешло: из a — $(7/6)\cdot 3 = 3{,}5$ см, из b — $(1/6)\cdot 3 = 0{,}5$ см; итого 4 см — как на графике (точка $l = 3$, $h = 4$). Это согласует результаты шагов 2–3.

Второй этап: уровень $h = 6$ см лежит на нём (h дошёл до 4 лишь к концу первого). Нужно подняться ещё на 2 см со скоростью $(4/3)V$: время $\tau = 2\text{ см}/((4/3)V) = 1{,}5\text{ см}/V$. За τ добавилось: из a — $(1/6)\cdot 1{,}5 = 0{,}25$ см, из b — $(7/6)\cdot 1{,}5 = 1{,}75$ см. Всего к моменту $h = 6$ см:

$$\text{из } a:\ 3{,}5 + 0{,}25 = 3{,}75\text{ см},$$
$$\text{из } b:\ 0{,}5 + 1{,}75 = 2{,}25\text{ см},$$
$$\text{вместе: } 3{,}75 + 2{,}25 = 6\text{ см}.$$

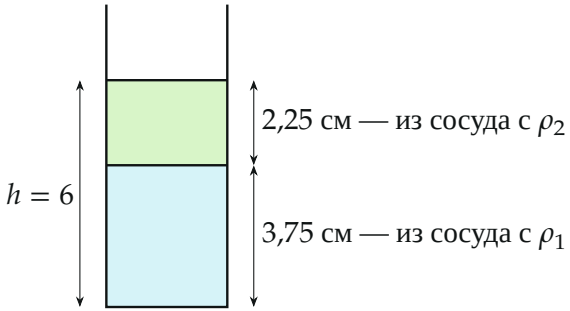


Как наполняется средний сосуд (случай 1): по горизонтали Vt — путь, пройденный за время t (первый этап до 3, второй до 6), по вертикали уровень h; числа — доли жидкостей при $h = 6$ см.

6. Средняя плотность. Объём смеси — сумма объёмов, масса — сумма масс: $\rho_{\text{см}} = (3{,}75\rho_a + 2{,}25\rho_b)/6$. В случае (1) a — левый ($\rho_a = \rho_1$):

$$\rho_{\text{см}_1} = \frac{3{,}75\rho_1 + 2{,}25\rho_2}{6} = \frac{15\rho_1 + 9\rho_2}{24}.$$

В случае (2) a — правый ($\rho_a = \rho_2$): $\rho_{\text{см}_2} = (9\rho_1 + 15\rho_2)/24$.



Смесь в среднем сосуде при $h = 6$ см: слои показывают только, сколько жидкости откуда пришло (в сосуде они перемешаны).

Обратите внимание. Скорость $\Delta h/\Delta t$ складывается из скоростей обоих поршней, а $\Delta l/\Delta t$ — их разность: именно поэтому график даёт

сразу и сумму, и разность. И второй этап: поршни не просто «замедляются», а меняются скоростями — быстрый становится медленным.

Проверка. В конце процесса ($l = 0$, $h = 8$ см) из каждого сосуда пришло по 4 см: $3{,}5 + 0{,}5 = 4$ и $0{,}5 + 3{,}5 = 4$; плотность смеси $(\rho_1 + \rho_2)/2$ — среднее, как и должно быть при равных объёмах. При $h = 6$ см коэффициенты $15 + 9 = 24$: плотность между ρ_1 и ρ_2. Если $\rho_1 = \rho_2$, ответ равен этой плотности — верно.

Ответ. $\rho_{\text{см}} = (15\rho_1 + 9\rho_2)/24$, если сначала быстрее движется левый поршень; $\rho_{\text{см}} = (9\rho_1 + 15\rho_2)/24$, если сначала быстрее движется правый.