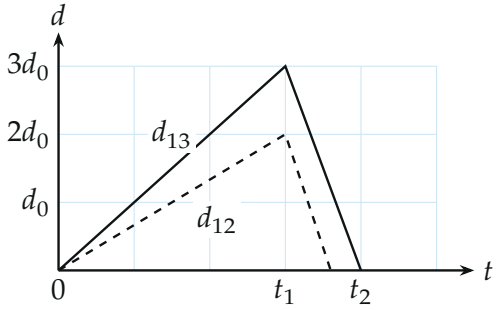
Три пловца в бассейне

Задача 6. [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 6] Три пловца разной квалификации решили посоревноваться на дистанции 100 метров в пятидесятиметровом бассейне. Стартовали пловцы одновременно, и каждый проплывал дистанцию со своей постоянной скоростью. Обозначим через $d_{12}(t)$ расстояние между первым и вторым пловцами, а через $d_{13}(t)$ – расстояние между первым и третьим пловцами в момент времени t. На рисунке сплошной линией изображен график зависимости $d_{13}(t)$ для части заплыва – от старта до момента времени t_2. График зависимости $d_{12}(t)$ изображен пунктиром. Численное значение величины d_0 неизвестно, но зато известно, что $t_1 = 30$ с и $t_2 = 40$ с. При определении расстояния между пловцами ширина дорожек бассейна не учитывалась, считалось, что спортсмены движутся почти вдоль одной прямой. Разворот каждого из пловцов происходит очень быстро.

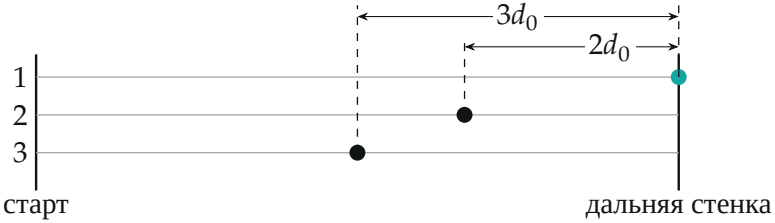


▲ **Решение. Что происходит.** До момента t_1 оба расстояния растут линейно, а потом резко убывают: значит, в t_1 развернулся первый пловец — он достиг дальней стенки и поплыл обратно навстречу остальным. По этому событию находим скорость первого, потом по моменту встречи t_2 — скорость третьего и неизвестное d_0. Остальное — кинематика равномерного движения: пути, времена финиша и кусочно-линейные графики. Класс задачи: равномерное движение, относительное движение, графики $d(t)$.

Обозначения. $L = 50$ м — длина бассейна, $x_i(t)$ — расстояние i-го пловца от стартовой стенки, v_i — его скорость; $d_{1j} = |x_1 - x_j|$.

1. Кто развернулся в t_1. До t_1 пловцы плывут от старта к дальней стенке, $d_{12} = (v_1 - v_2)t$, $d_{13} = (v_1 - v_3)t$ — прямые из начала координат; первый быстрее остальных. В момент t_1 у обоих графиков излом. Если бы развернулся второй, изменился бы только d_{12}; если третий — только d_{13}. Чтобы изменились оба, развернулся первый (одновременный разворот второго и третьего невозможен: они плывут с разными скоростями и не могут быть в один момент у одной стенки). Итак, при $t_1 = 30$ с первый пловец у дальней стенки: $x_1(t_1) = L = 50$ м.

2. Скорость первого. $v_1 = L/t_1 = 50/30 = 5/3$ м/с.



Положения пловцов в момент $t_1 = 30$ с: первый у дальней стенки, расстояния до него $2d_0$ и $3d_0$.

3. Положение третьего в момент t_1. Расстояние от первого до третьего равно $3d_0$, значит $x_3(t_1) = 50 - 3d_0$, а скорость $v_3 = (50 - 3d_0)/30$ (путь за 30 с, он ещё плывёт вперёд).

4. Встреча первого и третьего в t_2. После разворота первый плывёт назад со скоростью v_1, третий — вперёд со скоростью v_3: они сближаются со скоростью $v_1 + v_3$. До встречи $t_2 - t_1 = 10$ с, и пройденное сближением равно $3d_0$:

$$3d_0 = (v_1 + v_3) \cdot 10 = 10\left(\frac{5}{3} + \frac{50 - 3d_0}{30}\right) = \frac{50}{3} + \frac{50 - 3d_0}{3}.$$

Умножаем на 3: $9d_0 = 50 + 50 - 3d_0$, откуда $12d_0 = 100$ и

$$d_0 = \frac{25}{3}\text{ м} \approx 8{,}3\text{ м}.$$

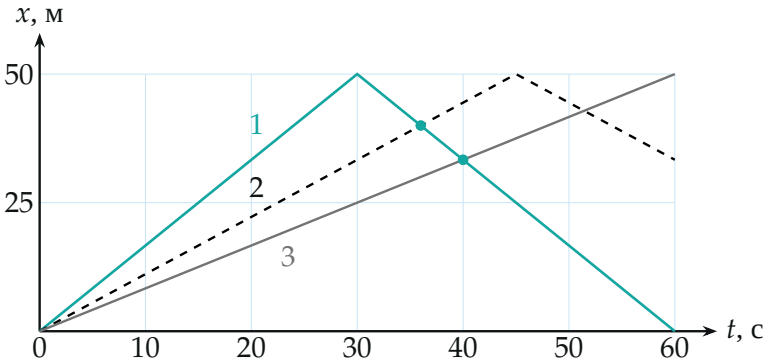
5. Скорости второго и третьего. Третий в t_1 был на расстоянии $50 - 3d_0 = 25$ м от старта: $v_3 = 25/30 = 5/6$ м/с. Второй — на расстоянии

$2d_0 = 50/3$ м от стенки, то есть на $x_2(t_1) = 50 - 50/3 = 100/3$ м: $v_2 = (100/3)/30 = 10/9$ м/с.

6. Времена на финише (путь 100 м):

$$T_1 = \frac{100}{5/3} = 60 \text{ с}, \qquad T_2 = \frac{100}{10/9} = 90 \text{ с}, \qquad T_3 = \frac{100}{5/6} = 120 \text{ с}.$$

Пункт 2. Достраиваем графики до 60 **с.** Положения: до разворота $x_i = v_i t$, после — $x_i = 100 - v_i t$. События: первый разворачивается в 30 с, второй — в $t = 50/v_2 = 45$ с, третий достигает дальней стенки только в $t = 60$ с ($x_3(60) = 50$ м), а первый как раз финиширует ($x_1(60) = 0$).



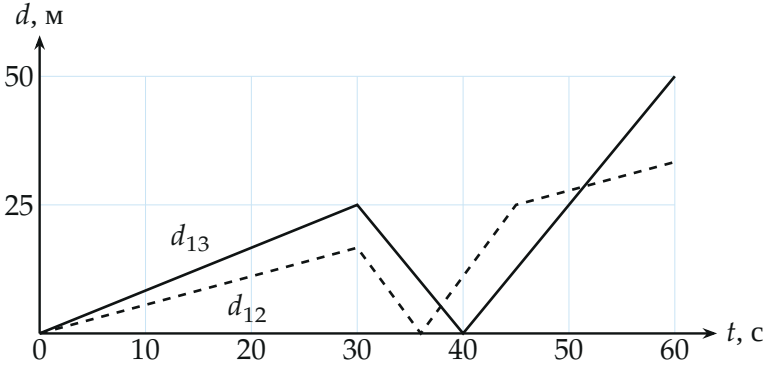
Положения пловцов $x_i(t)$: сплошная цветная — первый, пунктир — второй, серая — третий. Точки: встречи первого со вторым ($t = 36$ с) и с третьим ($t = 40$ с).

Расстояние $d_{12} = |x_1 - x_2|$, участок за участком:

- $0 \le t \le 30$: $d_{12} = (v_1 - v_2)t = 5t/9$; в $t = 30$ с равно $50/3 \approx 16{,}7$ м.
- $30 \le t \le 36$: первый плывёт назад, второй вперёд: $d_{12} = 100 - 25t/9$; обращается в нуль при $t = 36$ с (они встречаются на отметке 40 м).
- $36 \le t \le 45$: $d_{12} = 25t/9 - 100$, к $t = 45$ с равно 25 м (второй у стенки).
- $45 \le t \le 60$: оба плывут назад, $d_{12} = 5t/9$; в 60 с равно $100/3 \approx 33{,}3$ м.

Расстояние $d_{13} = |x_1 - x_3|$:

- $0 \le t \le 30$: $d_{13} = 5t/6$, в $t = 30$ с равно 25 м;
- $30 \le t \le 40$: $d_{13} = 100 - 5t/2$, нуль в $t = 40$ с (встреча на отметке $100/3$ м);
- $40 \le t \le 60$: $d_{13} = 5t/2 - 100$, в $t = 60$ с равно 50 м.



Графики до 60 с: сплошная линия — $d_{13}(t)$, пунктир — $d_{12}(t)$; изломы в $30, 36, 40, 45$ с.

Обратите внимание. Пловцов *трое*, поэтому по одному излому нельзя сказать, кто повернул: сначала надо заметить, что изломов два сразу, и только так выбрать первого. Расстояния считаем по модулю — после встречи пловцы меняются местами, а расстояние остаётся неотрицательным (график «отражается» от оси t).

Проверка. Время финиша согласовано со скоростями: $v_1 T_1 = 100$ м и т.д. Второй способ для d_0: к t_2 первый проплыл $50 + (5/3) \cdot 10 = 200/3$ м пути, то есть вернулся на отметку $100 - 200/3 = 100/3$ м, а третий за 40 с проплыл $(5/6) \cdot 40 = 100/3$ м: оба на одной отметке — встреча подтверждена. Значения в вершинах графиков: $d_{12}(45) = 25 \cdot 45/9 - 100 = 25$ м и $5 \cdot 45/9 = 25$ м — график непрерывен.

Ответ. 1) первый пловец финишировал через 60 с, второй через 90 с, третий через 120 с (при этом $d_0 = 25/3$ м); 2) графики достроены до 60 с: d_{13} — $0 \to 25 \to 0 \to 50$ м в моменты $0, 30, 40, 60$ с, d_{12} — $0 \to 50/3 \to 0 \to 25 \to 100/3$ м в моменты $0, 30, 36, 45, 60$ с.