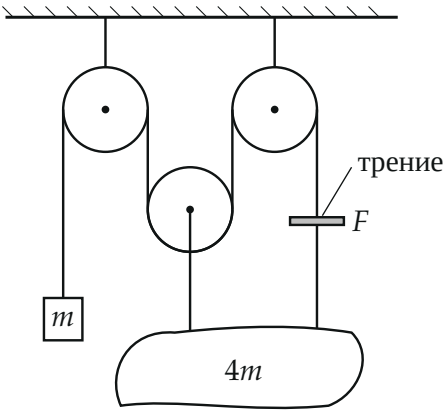
Груз на блоках с трением нити

Задача 7. [МОШ 2016/17, 8 класс, задача 7] Неоднородный груз массой $4m$ подвешен при помощи системы блоков так, как показано на рисунке. Нити и блоки очень лёгкие, свободные участки нитей вертикальны, трения в осях блоков нет. К свободному концу нити, перекинутой через блоки, прикреплен противовес массой m. Участок этой же нити, находящийся между грузом и правым блоком, проходит через небольшое отверстие в неподвижной перегородке. При скольжении нити в отверстии возникает сила трения $F = 10$ Н, действующая на нить со стороны стенок перегородки.

1. При каких значениях массы m противовеса система может оставаться в равновесии?
2. Где должен находиться центр масс неоднородного груза для того, чтобы равновесие было возможным?
3. Чему равен модуль силы трения F_1, и в какую сторону она направлена при $m = m_1 = 0{,}7$ кг?

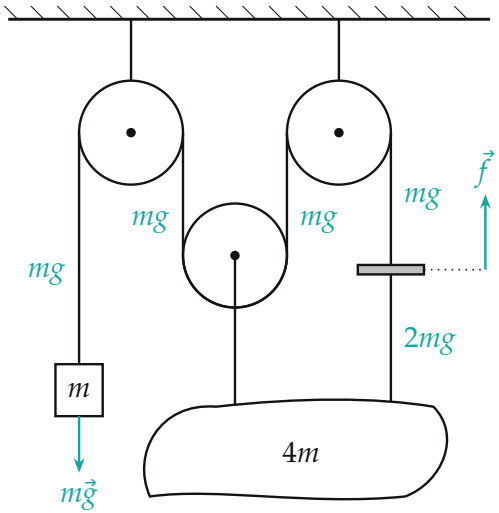
Модуль ускорения свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Нить одна, блоки и нить лёгкие, трения в осях нет, поэтому натяжение вдоль нити одинаково везде, кроме участка

с трением в отверстии. На противовес натяжение равно mg. Подвижный блок передаёт на груз удвоенное натяжение, остальной вес груза держит правый конец нити; разность натяжений по обе стороны отверстия уравновешивается трением, а оно не больше F. Так получается предельная масса. Положение центра масс следует из равенства моментов. Класс задачи: статика, блоки, сила трения покоя.

Обозначения. T — натяжение нити над отверстием, T_3 — под ним (у груза), R — сила, с которой стержень от подвижного блока тянет груз, f — сила трения на нить в отверстии. Ось y вертикально вверх.



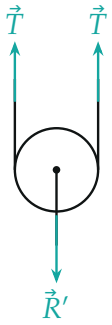
Натяжения нити и сила трения $\vec{f}$ на нить в отверстии (она направлена вверх — показано ниже); у противовеса — сила тяжести.

1. Противовес. Он неподвижен: сумма сил равна нулю, в проекции на y: $T - mg = 0$, значит $T = mg$.

2. Нить на блоках. Левый блок, подвижный блок и правый блок лёгкие и без трения: натяжение $T = mg$ одинаково на всех вертикальных участках нити от противовеса до отверстия.

3. Подвижный блок. Он лёгкий, сумма сил на него равна нулю. Нить огибает блок снизу: два участка тянут вверх по T, стержень тянет блок вниз с силой R'. В проекции на y: $2T - R' = 0$, откуда $R' = 2T = 2mg$.

По третьему закону Ньютона стержень тянет груз *вверх* с той же силой: $R = 2mg$.

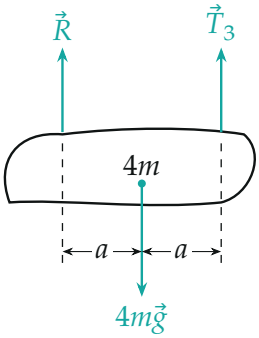


Подвижный блок: нить тянет вверх двумя участками по T, стержень — вниз с силой R'.

4. Груз. Груз неподвижен. Вертикальные силы: R и T_3 вверх, сила тяжести $4mg$ вниз. Проекция на y: $R + T_3 - 4mg = 0$, подставляем $R = 2mg$:

$$T_3 = 4mg - 2mg = 2mg.$$

Под отверстием натяжение вдвое больше, чем над ним: $T = mg$, $T_3 = 2mg$.



Силы на груз: R и T_3 вверх, $4m\vec{g}$ вниз из центра масс; расстояния от центра масс до линий действия R и T_3 равны (шаг 6).

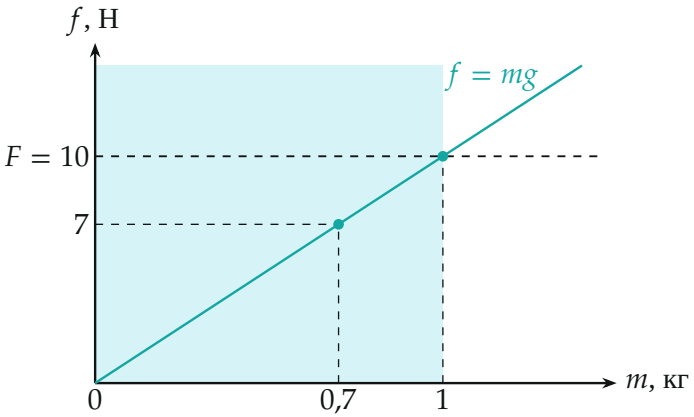
5. Нить в отверстии, пункт 1. Нить покоится. На её лёгкий участок в отверстии действуют: сверху T (вверх), снизу T_3 (вниз) и сила трения f со стороны стенок. В проекции на y: $T - T_3 + f = 0$:

$$f = T_3 - T = 2mg - mg = mg.$$

Знак плюс — трение направлено *вверх*: нить стремится сползти вниз (под отверстием натяжение больше), и стенки её удерживают. Трение покоя не превосходит F: $f \le F$, то есть $mg \le F$:

$$m \le m_0 = F/g = 10/10 \text{ кг} = 1 \text{ кг}.$$

Равновесие возможно при $m < m_0 = 1$ кг; при $m = m_0$ трение достигает предела F; при $m > m_0$ нить поползёт вниз, груз опустится, противовес поднимется.



Нужная сила трения $f = mg$ и предел $F = 10$ Н: заливкой отмечены массы, при которых равновесие возможно.

6. Центр масс (пункт 2). На груз действуют три вертикальные силы: $R = 2mg$ вверх в точке крепления стержня подвижного блока, $T_3 = 2mg$ вверх в точке крепления нити и $4mg$ вниз в центре масс. Груз не вращается: сумма моментов относительно любой оси равна нулю. Возьмём ось через центр масс; плечи сил R и T_3 — горизонтальные расстояния

a_1 и a_2 от центра масс до их линий действия, и они вращают в разные стороны:

$$R\,a_1 = T_3\,a_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2,$$

так как $R = T_3 = 2mg$. Центр масс лежит на равных расстояниях от двух вертикальных линий, вдоль которых расположены стержень подвижного блока и правая нить, на которых груз висит (посередине между ними).

7. Пункт 3. При $m = m_1 = 0{,}7$ кг: $f = m_1 g = 0{,}7 \cdot 10 = 7$ Н. Это меньше $F = 10$ Н — трение покоя справляется. Направление — вверх (на нить), так как $T_3 > T$:

$$F_1 = m_1 g = 7 \text{ Н}, \qquad \text{направлена вверх.}$$

Обратите внимание. Сила трения здесь — сила *покоя*: она равна не F, а ровно столько, сколько нужно для равновесия (7 Н); $F = 10$ Н — только предел. Натяжение нити не одинаково на всей длине: слева и справа от отверстия оно разное (разность mg уравновешена трением).

Проверка. Размерность: F/g — килограммы. Второй способ для пункта 1 — золотое правило механики. Пусть груз опустился на s. Подвижный блок опустился вместе с ним на s и «забрал» $2s$ нити на двух вертикальных участках; ещё s нити ушло под отверстием к грузу. Длина нити постоянна, значит, противовес поднялся на $3s$. Выигрыш энергии: груз потерял $4mg\,s$, противовес приобрёл $mg \cdot 3s$, остаётся $mg\,s$. Нить прошла сквозь отверстие путь s, работа трения не больше Fs. Движение невозможно, если $mg\,s \le Fs$, то есть $m \le F/g$ — тот же ответ. Смысл: тяжёлый груз почти уравновешен противовесом на подвижном блоке, а остаток mg держит трение.

Ответ. 1) $m < m_0 = F/g = 1$ кг (при $m = m_0$ трение предельное); 2) центр масс — на равных расстояниях от двух вертикальных линий, на которых груз подвешен (посередине между ними); 3) $F_1 = m_1 g = 7$ Н, направлена вверх.