Жук на подвешенном клочке бумаги

Задача 1. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 1] На очень лёгком клочке бумаги нарисовали окружность радиусом a и подвесили его на неподвижной горизонтальной оси O, относительно которой клочок может свободно вращаться (см. рисунок). В точку A, которая находится на нарисованной окружности под осью, садится жук и начинает ползти по этой окружности с постоянной по модулю скоростью V, перемещаясь в точку B, расположенную на продолжении отрезка OA. Через какое время от начала движения жук будет иметь максимальную скорость относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчета, если $|OA| = a$? Чему будет равна эта скорость? Считайте массу жука намного больше массы клочка бумаги.

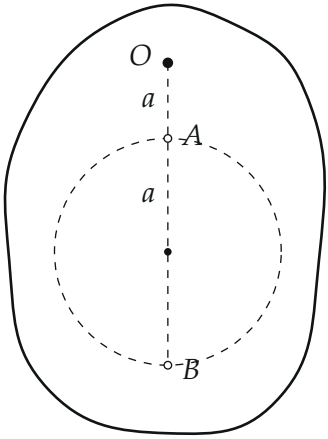


Рис. 1. Рисунок условия: клочок бумаги с осью O, окружность радиусом a (пунктир), точки A и B на одной вертикали с осью

▲ **Решение. Что происходит.** Клочок невесом, поэтому моменты сил на него относительно O уравновешены. Сила оси проходит через O, значит и сила жука на клочок — а по третьему закону Ньютона и сила клочка на жука — направлена вдоль прямой, соединяющей жука с O. Жук стартует под осью: сила тяжести и сила клочка вертикальны, горизонтальной

силы нет, и жук всё время остаётся строго под осью (клочок поворачивается под него). Значит, его лабораторная скорость вертикальна, а модуль равен скорости изменения расстояния r от жука до O. Ключевой закон: сложение скоростей — скорость относительно клочка плюс скорость той точки клочка, на которой сидит жук.

Обозначения. P — положение жука, $r = |OP|$, C — центр окружности, $\varphi = \angle ACP$, $\vec{V}$ — скорость жука относительно клочка (по касательной к окружности, $|\vec{V}| = V$), $\vec{w}$ — скорость точки клочка под жуком из-за его вращения ($\vec{w} \perp OP$), $\vec{u}$ — скорость жука в лабораторной системе.

1. Сложение скоростей. Скорость жука относительно лаборатории:

$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{w}.$$

Спроецируем на прямую OP и на перпендикуляр к ней. Так как $\vec{u} \parallel OP$, поперечные проекции гасятся: $V_\perp + w = 0$. Вдоль OP скорость $\vec{w}$ проекции не имеет, и

$$u = V_\parallel = V\cos\psi,$$

где ψ — угол между касательной к окружности в точке P и прямой OP.

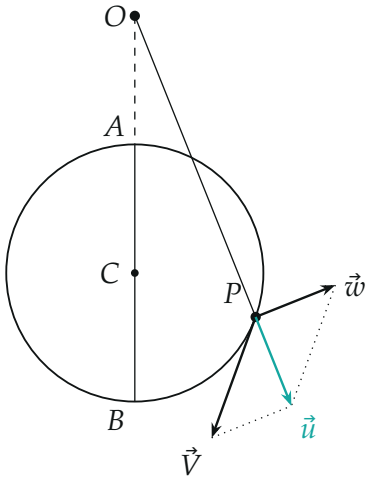


Рис. 2. Жук в точке P ($\varphi = 110°$, рисунок в системе клочка): $\vec{V}$ по касательной плюс $\vec{w}$ поперёк OP дают $\vec{u}$ вдоль OP

2. Когда u наибольшая. Проекция $V\cos\psi$ не больше V и равна V при $\psi = 0$: касательная к окружности в точке P должна идти вдоль OP, то есть OP — касательная к окружности из точки O. Пусть T — точка касания, тогда $CT \perp OT$ и в прямоугольном треугольнике OTC катет $|CT| = a$, гипотенуза $|OC| = 2a$:

$$\cos\angle OCT = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle OCT = 60^\circ.$$

При $\psi = 0$ вращение клочка в этот момент не нужно ($w = 0$), и $u = V$.

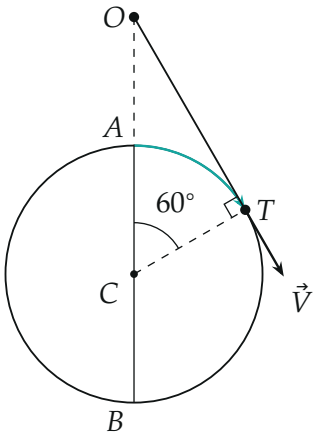


Рис. 3. Нужный момент: OT — касательная к окружности, $\vec{V}$ в точке T направлена вдоль прямой OT; бирюзовая дуга AT — путь жука

3. Время и скорость. Дуга AT стягивает центральный угол $60^\circ = \pi/3$, её длина $\pi a/3$. Жук ползёт с постоянной скоростью V относительно клочка, поэтому

$$t = \frac{\pi a/3}{V} = \frac{\pi a}{3V}, \qquad u_{\max} = V.$$

Проверка вторым способом. Расстояние r найдём по теореме косинусов в треугольнике OCP ($|OC| = 2a$, $|CP| = a$, угол при C равен

$\varphi = Vt/a$):

$$r = a\sqrt{5 - 4\cos\varphi}, \qquad u = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{2V\sin\varphi}{\sqrt{5 - 4\cos\varphi}}.$$

Производная от $\dfrac{4\sin^2\varphi}{5 - 4\cos\varphi}$ по $\cos\varphi$ обращается в нуль при $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, то есть при $\varphi = 60°$, и $u = 2V \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}/\sqrt{3} = V$ — то же самое.

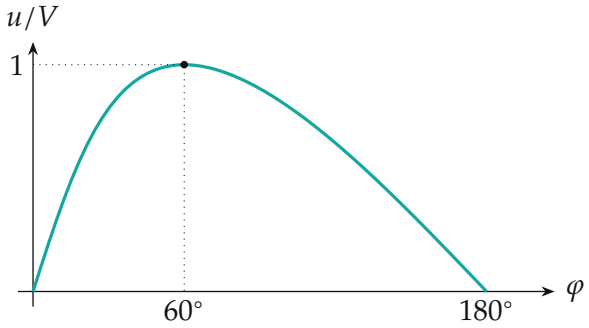


Рис. 4. Скорость жука в лабораторной системе в долях V как функция угла φ: нуль в A и B (там движение поперёк OP, его целиком съедает вращение клочка), наибольшее значение 1 при $\varphi = 60°$

Обратите внимание.

- Жук всё время под осью, так что вращение клочка не «добавляет» скорость, а гасит поперечную: лабораторная скорость жука только радиальная.
- Максимум достигается не в середине пути ($\varphi = 90°$ даёт $u \approx 0{,}89V$), а раньше, когда ползок идёт вдоль прямой на ось.

Проверка. Размерность: $\pi a/(3V)$ — время. В A и B формула даёт $u = 0$: там $\vec{V}$ поперёк OP. Больше V скорость быть не может — это проекция $\vec{V}$. Смысл: невесомый клочок подстраивается под жука, и жук в лаборатории движется только по вертикали.

Ответ. $u_{\max} = V$, достигается через $t = \dfrac{\pi a}{3V}$ после начала движения.