Клин с шариком на нити

Задача 2. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 2] На горизонтальной плоскости находится клин массой M, наклонная поверхность которого образует угол α с горизонтом. На клине лежит маленький шарик массой m, который соединен невесомой нерастяжимой нитью длиной L с неподвижной осью O, расположенной вне клина (см. рис.). Клин удерживают в таком положении, что нить параллельна наклонной поверхности клина. Трение в системе отсутствует. Клин отпускают, предоставляя системе возможность двигаться. Найдите модули ускорений шарика и клина относительно горизонтальной плоскости в момент сразу после отпускания клина. Нить можно считать очень длинной.

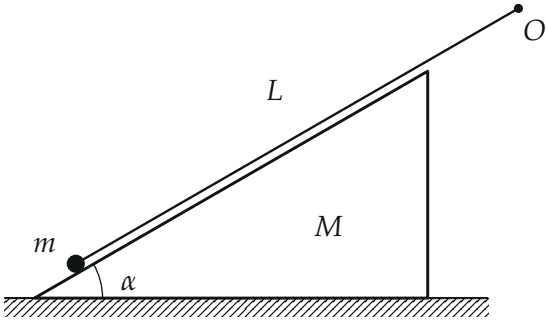


Рис. 1. Рисунок условия: клин M на гладкой плоскости, шарик m на наклонной грани, нить длиной L параллельна грани и идёт к оси O

▲ **Решение. Что происходит.** Сразу после отпускания скорости обоих тел равны нулю. Шарик связан нитью с осью, и пока нить натянута, он может двигаться только по окружности радиусом L вокруг O. Центростремительное ускорение v^2/L при $v = 0$ равно нулю, поэтому ускорение шарика *перпендикулярно нити*, то есть перпендикулярно склону (нить параллельна склону, а при очень длинной нити её направление за малое время не меняется). С другой стороны, шарик остаётся на поверхности клина, поэтому его ускорение относительно клина направлено вдоль склона. Эти два условия связывают ускорение шарика с ускорением клина. Ключевые законы: сложение ускорений, второй закон Нью-

тона для шарика и для клина, третий закон Ньютона для силы их давления.

Обозначения. Ось t — вдоль склона вверх (к оси O), ось n — перпендикулярно склону от клина, ось x — горизонтально вправо. $\vec{a}$ — ускорение шарика, $\vec{A}$ — ускорение клина (горизонтальное: по плоскости, трения нет), $\vec{a}_{\text{отн}}$ — ускорение шарика относительно клина (вдоль склона), T — сила натяжения нити, N — сила реакции склона. Направление $\vec{A}$ выберем вправо (в конце ответ будет положительным).

1. Связь ускорений. Ускорение шарика в лабораторной системе — сумма ускорения клина и относительного ускорения (сложение ускорений):

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}_{\text{отн}}, \qquad \vec{a}_{\text{отн}} \parallel t.$$

Разложим $\vec{A}$ на оси t и n: $A_t = A\cos\alpha$, $A_n = -A\sin\alpha$ (ось n направлена вверх-влево, а $\vec{A}$ вправо). Из того, что $a_t = 0$ (ускорение шарика перпендикулярно нити, то есть склону), получаем

$$a_t = A\cos\alpha + a_{\text{отн}\,t} = 0 \;\Rightarrow\; a_{\text{отн}\,t} = -A\cos\alpha, \qquad a_n = A_n = -A\sin\alpha.$$

Шарик движется относительно клина вниз по склону, а в лабораторной системе — перпендикулярно склону, к клину.

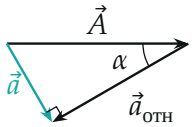


Рис. 2. Сложение ускорений $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}_{отн}$: $\vec{a}_{отн}$ идёт вниз вдоль склона, а сумма $\vec{a}$ перпендикулярна склону — в прямоугольном треугольнике $a = A\sin\alpha$, $a_{отн} = A\cos\alpha$

2. Динамика шарика. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, натяжение нити $\vec{T}$ (вдоль нити, то есть вдоль t, к оси O) и реакция склона $\vec{N}$ (вдоль n; трения нет). Второй закон Ньютона для шарика в проекциях на оси t и n:

$$t:\; T - mg\sin\alpha = m\,a_t = 0, \qquad n:\; N - mg\cos\alpha = m\,a_n = -mA\sin\alpha.$$

Первое уравнение даёт $T = mg\sin\alpha$ — натяжение нужно, чтобы шарик не съезжал вдоль склона; второе даёт

$$N = mg\cos\alpha - mA\sin\alpha.$$

Реакция меньше $mg\cos\alpha$: шарик ускоряется к клину.

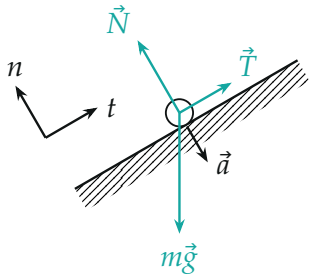


Рис. 3. Силы на шарик: $m\vec{g}$ вниз, $\vec{T}$ вдоль склона вверх, $\vec{N}$ перпендикулярно склону; $\vec{a}$ (чёрная) — ускорение шарика, перпендикулярное склону и направленное к нему

3. Динамика клина. По третьему закону Ньютона шарик давит на клин с силой N, направленной по нормали *внутрь* клина (против n). Горизонтальная проекция этой силы — $N\sin\alpha$ вправо; сила тяжести клина, вертикальная часть давления шарика $N\cos\alpha$ и реакция плоскости вертикальны и горизонтального ускорения не дают. Второй закон Ньютона для клина по оси x:

$$MA = N\sin\alpha.$$

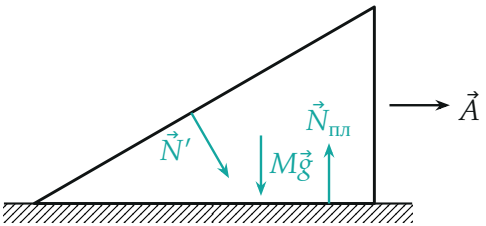


Рис. 4. Силы на клин: давление шарика $\vec{N}'$ (равно по модулю N, направлено внутрь клина), сила тяжести $M\vec{g}$ и реакция плоскости $\vec{N}_{пл}$; горизонтальная составляющая $\vec{N}'$ разгоняет клин вправо

4. Решение. Подставим N из п. 2 в уравнение клина:

$$MA = (mg\cos\alpha - mA\sin\alpha)\sin\alpha \;\Rightarrow\; A\,(M + m\sin^2\alpha) = mg\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$A = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \qquad a = A\sin\alpha = \frac{mg\sin^2\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}.$$

Ускорение шарика в лабораторной системе отсчёта по модулю $a = |a_n| = A\sin\alpha$ (оно перпендикулярно склону).

Обратите внимание.

- Шарик не скользит по клину в обычном смысле: его ускорение относительно земли *перпендикулярно* склону, а вдоль склона он движется только относительно клина ($a_{\text{отн}} = A\cos\alpha$).
- Направление нити в момент $t = 0$ не меняется (она очень длинная), а $v^2/L = 0$: это и даёт ускорение шарика строго перпендикулярно склону.

Проверка. Размерность: $[mg/(M+m)]$ — ускорение. Предел $M \to \infty$: $A \to 0$, $a \to 0$ — тяжёлый клин не сдвигается, шарик держит нить. Предел $m \gg M$: $A \to g\cot\alpha$, $a \to g\cos\alpha$ — клин почти не удерживает шарик, и остаётся составляющая g, перпендикулярная нити, то есть $g\cos\alpha$ (а $T \to mg\sin\alpha$ гасит вдоль-нитяную составляющую). Знак: $N = mg\cos\alpha - mA\sin\alpha = \dfrac{mgM\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} > 0$ — шарик остаётся на клине. Смысл: нить и склон задают шарику ускорение перпендикулярно склону, а клин при этом едет вправо.

Ответ. $a = \dfrac{mg\sin^2\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ (шарик), $A = \dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ (клин).