Четыре термостата и стержни

Задача 3. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 3] Четыре термостата, в которых поддерживаются температуры $T_1 = +10\,^\circ\text{C}$, $T_2 = +20\,^\circ\text{C}$, $T_3 = 0\,^\circ\text{C}$ и $T_4 = -10\,^\circ\text{C}$, соединены между собой при помощи пяти одинаковых теплопроводящих стержней (см. рис.). Найдите установившиеся температуры точек A и B соединения стержней. Мощность теплопередачи через каждый стержень пропорциональна разности температур на его концах. Потерями теплоты можно пренебречь.

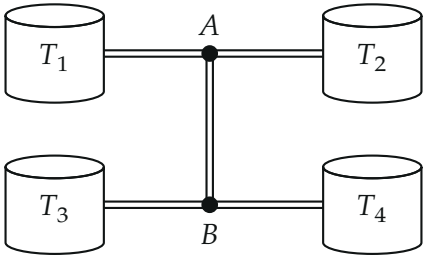


Рис. 1. Рисунок условия: термостаты T_1, T_2 сверху, T_3, T_4 снизу, пять одинаковых стержней сходятся в точках A и B

▲ **Решение. Что происходит.** В установившемся режиме температуры точек A и B не меняются. Точка соединения теплоты не накапливает (её теплоёмкостью пренебрегаем), поэтому сколько теплоты за секунду пришло к ней по одним стержням, столько же и ушло по другим. Мощность через стержень пропорциональна разности температур на его концах — это то же, что закон Ома для резистора: температура — потенциал, мощность — ток, стержень — резистор, а баланс мощности в точке — первое правило Кирхгофа. Ключевые законы: закон теплопроводности стержня и сохранение энергии (баланс мощностей в узле).

Обозначения. T_A, T_B — искомые температуры, k — коэффициент пропорциональности мощности и разности температур (одинаков у всех стержней, они одинаковые). Мощность, приходящая в точку от соседа с температурой T: $P = k\,(T - T_{\text{точки}})$ (если T меньше, мощность отрицательна: теплота уходит к соседу).

1. Баланс в точке A**.** К A подходят три стержня: от T_1, от T_2 и от B. Сумма мощностей, пришедших к A по трём стержням, равна нулю:

$$k(T_1 - T_A) + k(T_2 - T_A) + k(T_B - T_A) = 0 \;\Rightarrow\; 3T_A - T_B = T_1 + T_2.$$

2. Баланс в точке B**.** К B подходят стержни от T_3, от T_4 и от A:

$$k(T_3 - T_B) + k(T_4 - T_B) + k(T_A - T_B) = 0 \;\Rightarrow\; 3T_B - T_A = T_3 + T_4.$$

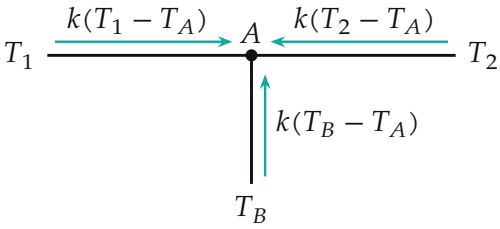


Рис. 2. Баланс в точке A: бирюзовые стрелки — мощности теплоты, приходящие к A от соседей; их сумма равна нулю. Для B — то же с соседями T_3, T_4, A

3. Решаем систему. Из первого уравнения $T_B = 3T_A - (T_1 + T_2)$. Подставим во второе:

$$3(3T_A - (T_1 + T_2)) - T_A = T_3 + T_4 \;\Rightarrow\; 8T_A = 3(T_1 + T_2) + (T_3 + T_4),$$

$$T_A = \frac{3(T_1 + T_2) + T_3 + T_4}{8} = \frac{3 \cdot 30 - 10}{8}\ ^\circ\mathrm{C} = 10\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Тогда $T_B = 3T_A - (T_1 + T_2) = 30 - 30 = 0\ ^\circ$C; в общем виде $T_B = \dfrac{3(T_3 + T_4) + T_1 + T_2}{8}$. Задача содержит только разности температур, поэтому градусы Цельсия можно не переводить в кельвины.

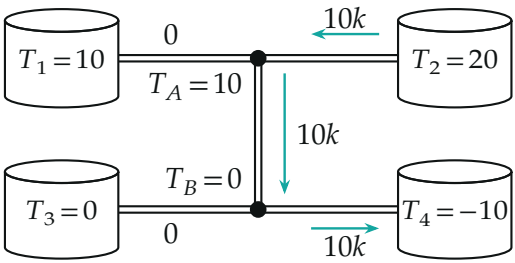


Рис. 3. Найденные температуры (в °C) и мощности через стержни: теплота идёт по цепочке $T_2 \to A \to B \to T_4$ по $10k$ через каждый стержень; через стержни к T_1 и T_3 мощность равна нулю

Обратите внимание.

- Нулевая мощность в стержнях к T_1 и T_3 — следствие того, что получилось $T_A = T_1$ и $T_B = T_3$, а не исходное условие: уравнения баланса нужно писать для всех трёх стержней каждой точки.
- Мощность через стержень входит с тем знаком, который даёт разность температур; так уравнения для A и B получаются однотипно.

Проверка. Размерность: T_A — взвешенное среднее температур в градусах. Подстановка: в A пришло $k(10-10)+k(20-10)+k(0-10) = 0+10k-10k = 0$; в B: $k(0-0)+k(-10-0)+k(10-0) = 0-10k+10k = 0$. Второй способ: каждая температура узла — среднее по трём соседям: $T_A = (T_1+T_2+T_B)/3 = (10+20+0)/3 = 10$, $T_B = (T_3+T_4+T_A)/3 = (0-10+10)/3 = 0$. Предел: если бы все четыре термостата имели одинаковую температуру, обе точки приняли бы её же — формулы дают $(3\cdot 2T + 2T)/8 = T$. Смысл: теплота течёт от горячего термостата T_2 к холодному T_4 последовательно через три стержня, температура падает на 10 °C на каждом.

Ответ.

$$T_A = \frac{3(T_1+T_2)+T_3+T_4}{8} = +10\ ^\circ\text{C},$$

$$T_B = \frac{3(T_3+T_4)+T_1+T_2}{8} = 0\ ^\circ\text{C}.$$