Проволочная сетка между A и D

Задача 4. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 4] Определите сопротивление R_{AD} между точками A и D проволочной сетки, показанной на рисунке. Сопротивление каждого из проводников (вне зависимости от его длины), из которых спаяна сетка, равно R. Места спайки проводников обозначены точками. В центре сетки электрический контакт отсутствует.

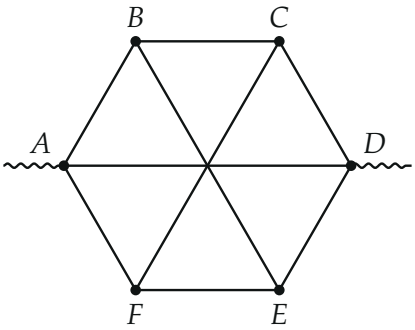


Рис. 1. Рисунок условия (вершины названы B, C, E, F для решения): шесть вершин шестиугольника, шесть сторон и три диагонали AD, BE, CF — девять проводников по R; в центре диагонали пересекаются без контакта

▲ **Решение. Что происходит.** Подключим к A и D источник напряжения U. Сетка симметрична относительно прямой AD: зеркальное отражение переводит её в себя, меняет местами $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow E$ и оставляет A и D на месте. Поэтому потенциалы зеркальных вершин равны. Между точками с равными потенциалами ток не течёт, так что их можно соединить проводом — токи в сетке не изменятся, а схема упростится до цепочки параллельных и последовательных соединений. Ключевые законы: симметрия, правила параллельного и последовательного соединения проводников, закон Ома.

Обозначения. $\varphi_B, \varphi_C, \ldots$ — потенциалы вершин, $\varphi_A = U$, $\varphi_D = 0$; I — полный ток от источника; $R_{AD} = U/I$. Диагонали пересекаются в центре без контакта: каждая — один проводник с сопротивлением R между своими концами (так и сказано: сопротивление не зависит от длины).

1. Равные потенциалы. Из симметрии $\varphi_B = \varphi_F$ и $\varphi_C = \varphi_E$ (на рисунке вершины с равными потенциалами лежат на одном перпендикуляре к AD).

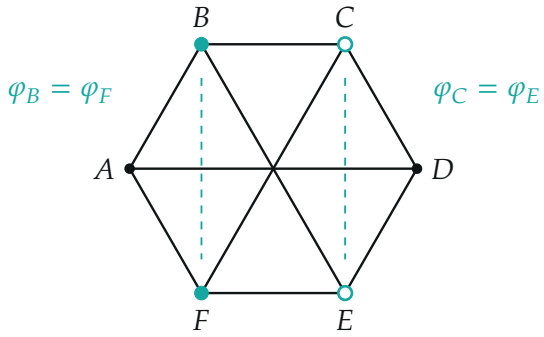


Рис. 2. Вершины с равными потенциалами (зеркальные относительно AD): B и F — залитые, C и E — светлые; бирюзовые пунктиры соединяют пары; между ними тока нет

2. Склеим узлы. Соединим B с F в узел X и C с E в узел Y. Теперь все проводники сетки идут между четырьмя узлами A, X, Y, D:

- между A и X: AB и AF — два проводника параллельно, $R_{AX} = R/2$;
- между X и Y: BC, FE, BE, FC — четыре проводника параллельно, $R_{XY} = R/4$;
- между Y и D: CD и ED — два проводника параллельно, $R_{YD} = R/2$;
- между A и D: диагональ AD напрямую, R.

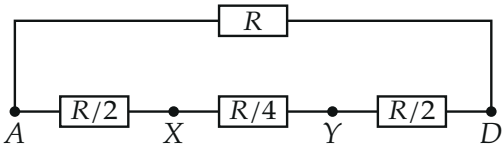


Рис. 3. Эквивалентная схема: цепочка $R/2$, $R/4$, $R/2$ между A и D и параллельно ей проводник R (диагональ AD)

3. Считаем. Цепочка из трёх участков — последовательное соединение:

$$R_{AXYD} = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{5R}{4}.$$

Она параллельна диагонали AD (сопротивление R):

$$R_{AD} = \frac{R \cdot \frac{5}{4}R}{R + \frac{5}{4}R} = \frac{5R}{9}.$$

Проверка вторым способом (потенциалы). Запишем для узлов B и C закон сохранения заряда (сумма токов в узле нуль), токи через проводник $(\varphi_i - \varphi_j)/R$; потенциалы B и F обозначим x, C и E — y:

$$B:\ (U - x) + (y - x) + (y - x) = 0 \ \Rightarrow\ U + 2y = 3x,$$

$$C:\ (x - y) + (0 - y) + (x - y) = 0 \ \Rightarrow\ 2x = 3y.$$

Отсюда $y = \frac{2}{3}x$, $U + \frac{4}{3}x = 3x$, $x = \frac{3}{5}U$, $y = \frac{2}{5}U$. Полный ток — сумма токов из A по проводникам AB, AF, AD: $I = \dfrac{2(U - x) + U}{R} = \dfrac{9U}{5R}$, значит $R_{AD} = U/I = \dfrac{5R}{9}$ — то же.

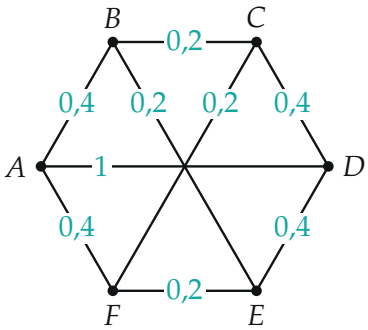


Рис. 4. Токи в проводниках в единицах U/R (ток течёт от A к D, в сторону убывания потенциала): в A входит $1 + 0{,}4 + 0{,}4 = 1{,}8$, в D выходит столько же; через каждый узел B, C токи сходятся ($0{,}4 = 0{,}2 + 0{,}2$)

Обратите внимание.

- Три диагонали в центре не соединены: нельзя считать, что в центре есть общий узел с шестью лучами. Это три отдельных проводника.
- Длина проводника на сопротивление не влияет (условие): диагональ R, хотя она вдвое длиннее стороны.

Проверка. Размерность: сопротивление. Предельное соображение: $R_{AD} < R$, потому что к диагонали AD (сопротивление R) параллельно подключена ещё цепочка из проводников — проводимость только растёт: $\dfrac{1}{R} + \dfrac{4}{5R} = \dfrac{9}{5R}$. Узловые токи на рис. 4: в B входит $0{,}4$, выходит $0{,}2 + 0{,}2$ — баланс сходится. Смысл: $\frac{5}{9}$ всего тока идёт по прямой диагонали, остальные $\frac{4}{9}$ — по шестиугольнику.

Ответ. $R_{AD} = \dfrac{5}{9}R$.