Ракета, самолёт и квадрокоптер

Задача 5. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 5] Ракета удаляется от горизонтальной поверхности Земли со скоростью V, направленной строго вертикально. Параллельно поверхности точно на запад летит самолет со скоростью $V/\sqrt{3}$. 1) С какой наименьшей по модулю скоростью u и в каком направлении должен лететь (относительно Земли) квадрокоптер для того, чтобы относительно него ракета и самолет имели противоположные по направлению скорости? 2) Под каким углом к горизонту (относительно Земли) должна быть направлена скорость квадрокоптера для того, чтобы ракета и самолет имели в системе отсчета квадрокоптера противоположные по направлению и равные по модулю скорости? Чему равен модуль скорости квадрокоптера в этом случае?

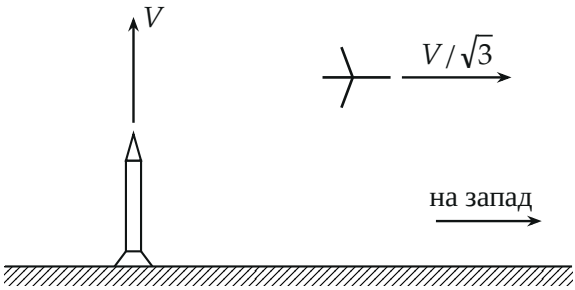


Рис. 1. Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): ракета летит вертикально вверх со скоростью V, самолёт — горизонтально на запад со скоростью $V/\sqrt{3}$

▲ **Решение.** **Что происходит.** Скорость тела относительно квадрокоптера — это разность векторов: скорость тела относительно Земли минус скорость квадрокоптера относительно Земли (закон сложения скоростей, система отсчёта Земли — неподвижная). Условие «противоположны по направлению» означает, что две разности антипараллельны. Удобно строить векторы скоростей из одной точки: если концы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — две точки, то разность $\vec{v}_1 - \vec{u}$ — вектор от конца $\vec{u}$ к концу $\vec{v}_1$. Тогда в пункте 1 конец $\vec{u}$ должен лежать на отрезке между концами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а в пункте 2 — в его середине.

Обозначения. Ось x — на запад, ось y — вертикально вверх. $\vec{v}_1$ — скорость ракеты, $v_1 = V$, $\vec{v}_1 = (0;\, V)$; $\vec{v}_2$ — скорость самолёта, $v_2 = V/\sqrt{3}$, $\vec{v}_2 = (V/\sqrt{3};\, 0)$; $\vec{u}$ — скорость квадрокоптера, $\vec{u} = (u_x;\, u_y)$. Скорости относительно квадрокоптера: $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{u}$ и $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{u}$.

Пункт 1. Антипараллельность. Векторы $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$ противоположны по направлению, если $\vec{v}'_1 = -k\,\vec{v}'_2$ при некотором $k > 0$. Отложим $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ из точки O; их концы — точки R и S. Вектор $\vec{v}'_1$ идёт от конца $\vec{u}$ в точку R, $\vec{v}'_2$ — от конца $\vec{u}$ в точку S. Два вектора из одной точки, направленные в противоположные стороны, лежат на одной прямой по разные стороны от неё: значит, конец $\vec{u}$ — точка U — лежит на прямой RS *между* R и S.

Из всех таких точек наименьшая по модулю $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ у той, чья длина OU наименьшая — у основания перпендикуляра, опущенного из O на прямую RS (кратчайшее расстояние от точки до прямой).

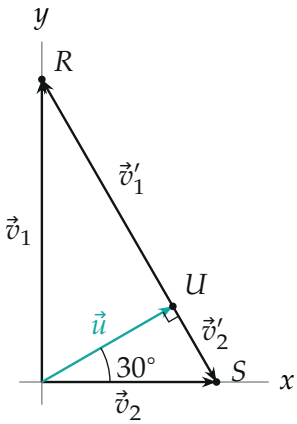


Рис. 2. Пространство скоростей, пункт 1: R и S — концы скоростей ракеты и самолёта, U — конец скорости квадрокоптера $\vec{u}$; $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$ — скорости ракеты и самолёта относительно квадрокоптера. Наименьшая $\vec{u}$ перпендикулярна RS

Найдём её. В прямоугольном треугольнике ORS катеты $OR = V$, $OS = V/\sqrt{3}$, поэтому $\operatorname{tg}\angle ORS = \dfrac{OS}{OR} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то есть $\angle ORS = 30°$.

Высота OU, опущенная из прямого угла на гипотенузу:

$$u = OU = OR\sin\angle ORS = V\sin 30^\circ = \frac{V}{2}.$$

Угол между OU и катетом OS (горизонталью) равен $90^\circ - \angle OSU = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ($\angle OSR = 60^\circ$ как второй острый угол). Значит, квадрокоптер летит на запад под углом 30° к горизонту со скоростью $V/2$.

Второй способ. Антипараллельность $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ — равенство нулю их векторного произведения: $(-u_x)(-u_y) - (V-u_y)(\frac{V}{\sqrt{3}} - u_x) = 0$, откуда $\sqrt{3}\,u_x + u_y = V$. Это уравнение прямой RS. Расстояние от начала координат до прямой $\sqrt{3}\,x + y = V$ равно $V/\sqrt{3+1} = V/2$, а нормаль к ней направлена как $(\sqrt{3};\,1)$, то есть под 30° к оси x — то же.

Пункт 2. Равные и противоположные. Теперь $\vec{v}_1' = -\vec{v}_2'$:

$$\vec{v}_1 - \vec{u} = -(\vec{v}_2 - \vec{u}) \;\Rightarrow\; \vec{u} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

В проекциях $u_x = \dfrac{V}{2\sqrt{3}}$, $u_y = \dfrac{V}{2}$: конец $\vec{u}$ — середина M отрезка RS. Модуль и угол к горизонту:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{V}{2}\sqrt{\frac{1}{3}+1} = \frac{V}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{u_y}{u_x} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \beta = 60^\circ.$$

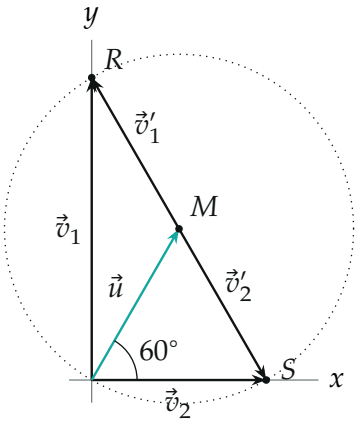


Рис. 3. Пункт 2: конец $\vec{u}$ — середина M гипотенузы RS, $\vec{v}_1' = -\vec{v}_2'$. Точка M — центр окружности (пунктир) через O, R, S, поэтому $OM = MR = MS = V/\sqrt{3}$

Обратите внимание.

- В пункте 1 годится любая точка отрезка RS (берём ближайшую к O), в пункте 2 — только середина.
- Скорость квадрокоптера — относительно Земли; скорости ракеты и самолёта относительно него — разности, а не суммы.

Проверка. Пункт 1, подстановка $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{4}V;\ \frac{V}{4})$: $\vec{v}_1' = (-\frac{\sqrt{3}}{4}V;\ \frac{3}{4}V)$, $\vec{v}_2' = (\frac{1}{4\sqrt{3}}V;\ -\frac{1}{4}V)$; отношение обеих проекций $\vec{v}_1'$ к проекциям $\vec{v}_2'$ равно -3: векторы антипараллельны, $v_1' = 3v_2'$. Пункт 2: $\vec{v}_1' = (-\frac{V}{2\sqrt{3}};\ \frac{V}{2})$, $\vec{v}_2' = (\frac{V}{2\sqrt{3}};\ -\frac{V}{2})$ — равны по модулю и противоположны. Ещё проверка: $V/2 < V/\sqrt{3}$ — наименьшая скорость меньше скорости пункта 2, как и должно быть (середина — одна из допустимых точек).

Ответ. 1) $u = \dfrac{V}{2}$, направление — на запад под углом 30° к горизонту; 2) $\beta = 60°$ к горизонту (в западном направлении), $u = \dfrac{V}{\sqrt{3}}$ — по модулю равна скорости самолёта.