Кубики на блоках в жидкости

Задача 6. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 6] В находящуюся в широком сосуде жидкость частично погружены одинаковые кубики со стороной a и массой M, которые удерживаются в равновесии при помощи системы, состоящей из невесомых блоков, соединенных очень легкой и нерастяжимой нитью (см. рис.). Трение в осях блоков отсутствует, плотность жидкости равна плотности кубиков. Изначально правый кубик погружен в жидкость ровно наполовину. 1) На какую величину изменится глубина погружения правого кубика, если на левый кубик поместить небольшой перегрузок массой $m = M/16$? 2) На сколько в результате этого изменятся модуль силы натяжения нити и модуль силы давления жидкости на дно? 3) При каких значениях массы перегрузка оба кубика останутся частично погруженными в жидкость? Явлениями, связанными со смачиванием поверхностей кубиков жидкостями, можно пренебречь.

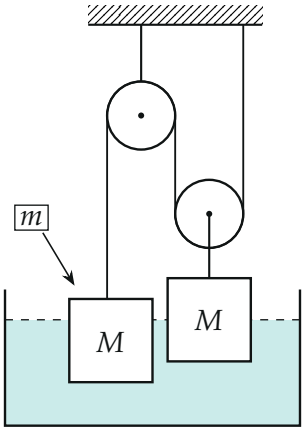


Рис. 1. Рисунок условия: нить от левого кубика идёт через неподвижный блок под подвижный (с правым кубиком) и к потолку

▲ **Решение. Что происходит.** Плотность кубика равна плотности жидкости $\rho = M/a^3$, поэтому кубик, погружённый на глубину h, испытывает силу Архимеда $F = \rho g a^2 h = Mg\,h/a$. Нить и блоки невесомы, трения нет: натяжение T одно по всей нити. Подвижный блок с кубиком держат

два участка нити, то есть сила $2T$. Сосуд широкий: уровень жидкости не меняется, и глубины меняются ровно на смещения кубиков.

Обозначения. h_1, h_2 — глубины погружения левого и правого кубиков, F_1, F_2 — силы Архимеда на них, T — натяжение нити; штрих — после перегрузка.

1. До перегрузка. Правый кубик с невесомым подвижным блоком (вверх $2T$ и F_2, вниз Mg):

$$2T + F_2 = Mg, \quad F_2 = Mg\frac{h_2}{a} = \frac{Mg}{2} \;\Rightarrow\; T = \frac{Mg}{4}.$$

Левый кубик (вверх T и F_1, вниз Mg): $T + F_1 = Mg$, откуда $F_1 = \frac{3}{4}Mg$ и $h_1 = \frac{3}{4}a$.

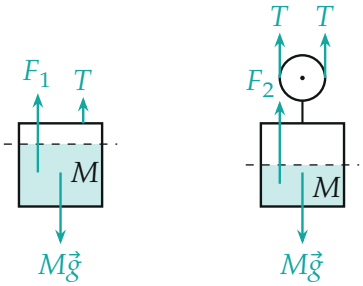


Рис. 2. Силы до перегрузка: на левый кубик F_1, T, $M\vec{g}$; на правый с подвижным блоком F_2, $2T$, $M\vec{g}$

2. Связь глубин. Пусть левый кубик опустился на x (его глубина стала $h_1' = h_1 + x$). Нить нерастяжима: левый участок удлинился на x, два участка у подвижного блока на столько же укоротились, то есть каждый на $x/2$, и блок с правым кубиком поднялся на $x/2$ ($h_2' = h_2 - x/2$).

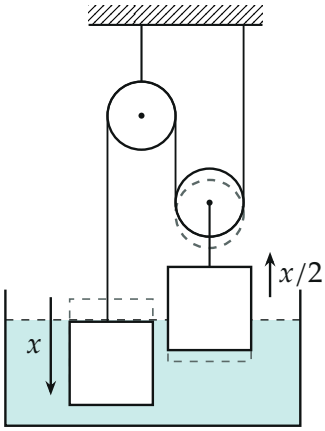


Рис. 3. Нерастяжимость нити: серым — до перегрузка, чёрным — после: левый кубик опустился на x, правый поднялся на $x/2$

3. После перегрузка. Силу Архимеда выражаем через глубину: $F = Mg\,h/a$. С учётом связи глубин:

$$F_1' = \frac{Mg}{a}\Big(\frac{3}{4}a + x\Big), \qquad F_2' = \frac{Mg}{a}\Big(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\Big).$$

Равновесие левого кубика с перегрузком, $T' + F_1' = (M+m)g$, и правого с блоком, $2T' + F_2' = Mg$; выразим T' из каждого и приравняем:

$$T' = \frac{Mg}{4} + mg - \frac{Mg\,x}{a} = \frac{Mg}{4} + \frac{Mg\,x}{4a},$$

$$mg - \frac{Mg\,x}{a} = \frac{Mg\,x}{4a} \;\Rightarrow\; \frac{5}{4}\frac{Mg\,x}{a} = mg \;\Rightarrow\; x = \frac{4ma}{5M}.$$

Пункт 1. Правый кубик поднялся на $x/2$, то есть его глубина *уменьшилась* на

$$\Delta h = \frac{x}{2} = \frac{2ma}{5M} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{16}a = \frac{a}{40}.$$

Пункт 2. Натяжение. Из второго выражения для T':

$$\Delta T = T' - T = \frac{Mg\,x}{4a} = \frac{mg}{5} = \frac{Mg}{80} \quad \text{(увеличилось)}.$$

Сила давления на дно. Она равна весу жидкости плюс $F_1 + F_2$ (по третьему закону Ньютона кубики давят на жидкость с силами Архимеда):

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = \frac{Mg}{a}\left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{Mg\,x}{2a} = \frac{2mg}{5} = \frac{Mg}{40} \quad \text{(увеличилась)}.$$

Второй способ: вытесненный объём вырос на $a^2(x - x/2) = a^2x/2$, уровень (и давление на дно) поднялся, сила давления выросла на $\rho g\, a^2 x/2 = Mg\,x/(2a)$ — то же самое.

Пункт 3. Оба кубика частично погружены. Нужно $0 < h_1', h_2' < a$. Левый кубик:

$$h_1' = \frac{3}{4}a + \frac{4ma}{5M} < a \;\Rightarrow\; \frac{4m}{5M} < \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; m < \frac{5}{16}M.$$

Правый: $h_2' = \frac{a}{2} - \frac{2ma}{5M} > 0$ при $m < \frac{5}{4}M$ — слабее. Итог: $m < \frac{5}{16}M$.

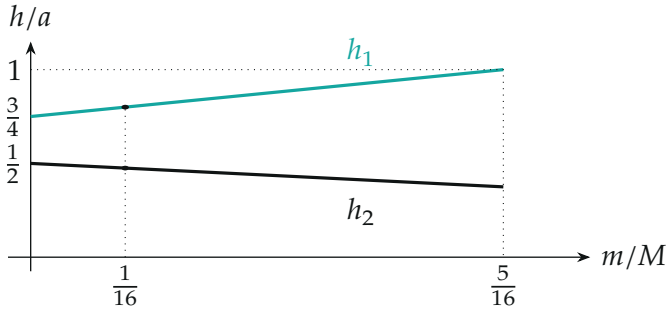


Рис. 4. Глубины в долях a; точки — 0,8 и 0,475 при $m = M/16$

Обратите внимание.

- Подвижный блок: сила вдвое больше, смещение вдвое меньше.

Проверка. Баланс сил всей системы: перегрузок mg распределился так — $\frac{2}{5}mg$ на дно (через жидкость), $3\Delta T = \frac{3}{5}mg$ на потолок (ось неподвижного блока держит $2T$, крепление нити — T); $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$.

Ответ. 1) глубина правого кубика уменьшится на $\Delta h = \frac{2ma}{5M} = \frac{a}{40}$; 2) $\Delta T = \frac{mg}{5} = \frac{Mg}{80}$, $\Delta F = \frac{2mg}{5} = \frac{Mg}{40}$ (обе растут); 3) $m < \frac{5}{16}M$.