Смесь воды со льдом в радиаторе

Задача 7. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 7] Для охлаждения своих одинаковых экспериментальных установок юные физики Вася и Петя используют радиаторы, в которые через трубки одинакового сечения закачивают жидкую смесь холодной воды, имеющей температуру $t_0 = 0$ °C, с мелко перетёртым льдом в объёмном соотношении три к одному. Известно, что в экспериментальной установке Васи на выходе из радиатора получается вода с температурой $t_1 = +32$ °C, а в установке Пети — с температурой $t_2 = +75$ °C. Тепловые мощности, отбираемые охлаждающей смесью у двух установок, одинаковы. Чему равно отношение скоростей закачивания смеси в радиаторы экспериментальных установок Васи и Пети? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

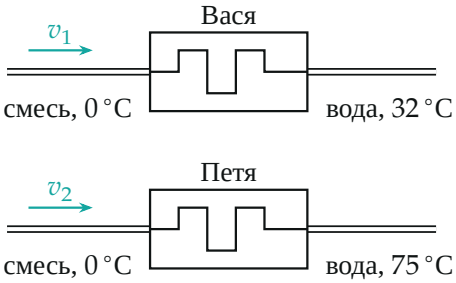


Рис. 1. Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): в радиатор Васи и Пети с одинаковой трубкой закачивают смесь воды и льда при 0 °C со скоростями v_1 и v_2; на выходе — вода 32 °C и 75 °C

▲ **Решение. Что происходит.** Тепловая мощность, отбираемая у установки, — это теплота, которую смесь получает за секунду. Смесь входит при 0 °C, значит, сначала плавится весь лёд (температура остаётся 0 °C), а потом вся вода, в том числе из льда, нагревается до температуры на выходе. Теплота, нужная на единицу объёма смеси, обозначим q; за секунду через трубку сечением S проходит объём Sv, поэтому мощность $P = q\,S\,v$. Мощности равны, сечения равны — значит, скорости

обратно пропорциональны теплотам q на единицу объёма. Ключевые законы: уравнение теплового баланса, плавление льда (λm) и нагрев воды ($cm\Delta t$).

Обозначения. V — малый объём смеси на входе, $m_в$ и $m_л$ — массы воды и льда в нём, q — теплота на единицу объёма смеси, t — температура воды на выходе (t_1 у Васи, t_2 у Пети), S — сечение трубки, v_1, v_2 — скорости закачивания, P — мощность. Теплопотерями и расширением при плавлении пренебрегаем.

1. Состав объёма V. Воды и льда по объёму 3 : 1, то есть $V_в = \frac{3}{4}V$ и $V_л = \frac{1}{4}V$. Массы — плотность на объём:

$$m_в = \rho_в \cdot \frac{3}{4}V, \qquad m_л = \rho_л \cdot \frac{1}{4}V.$$

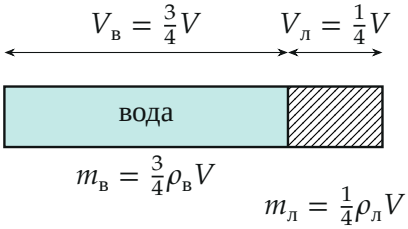


Рис. 2. Состав объёма смеси V: вода занимает три четверти объёма, лёд (штриховка) — одну четверть; массы различаются из-за разных плотностей

2. Теплота на объём V. Лёд массой $m_л$ плавится при 0 °C: $\lambda m_л$. Затем вся вода массой $m_л + m_в$ нагревается от 0 до t: $c\,(m_л + m_в)\,t$. Складываем:

$$Q = \lambda m_л + c\,(m_л + m_в)\,t = \frac{V}{4}\Big[\lambda\rho_л + c\,(\rho_л + 3\rho_в)\,t\Big].$$

Теплота на единицу объёма смеси:

$$q(t) = \frac{Q}{V} = \frac{1}{4}\Big[\lambda\rho_л + c\,(\rho_л + 3\rho_в)\,t\Big].$$

3. Мощность и скорость. За время τ через радиатор проходит объём

$V = S\,v\,\tau$, и мощность

$$P = \frac{Q}{\tau} = q(t)\,S\,v.$$

Мощности равны ($P_1 = P_2$), сечения S одинаковы:

$$q(t_1)\,v_1 = q(t_2)\,v_2 \;\Rightarrow\; \frac{v_1}{v_2} = \frac{q(t_2)}{q(t_1)} = \frac{\lambda\rho_л + c\,(\rho_л + 3\rho_в)\,t_2}{\lambda\rho_л + c\,(\rho_л + 3\rho_в)\,t_1}.$$

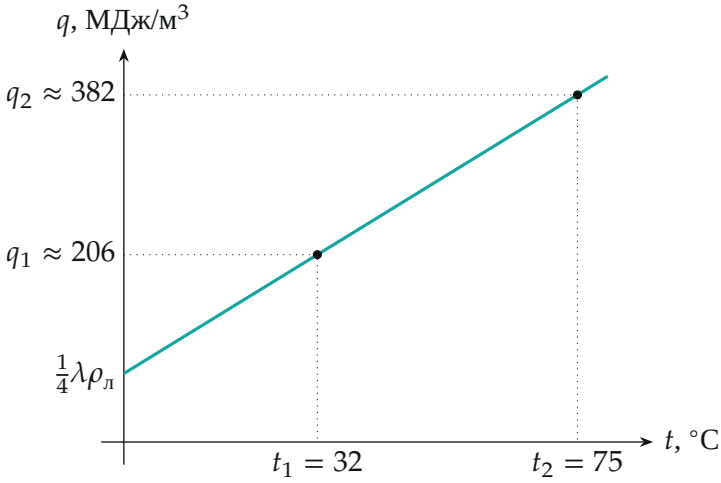


Рис. 3. Теплота на единицу объёма смеси q в зависимости от температуры воды на выходе: прямая, начинающаяся с $\frac{1}{4}\lambda\rho_л \approx 75$ МДж/м^3 (плавление льда); точки — установки Васи и Пети. Скорость закачивания обратно пропорциональна q: $v_1/v_2 = q_2/q_1$

4. Числа. Вычислим слагаемые:

$$\lambda\rho_л = 3{,}35 \cdot 10^5 \cdot 900 = 3{,}015 \cdot 10^8\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3},$$

$$c(\rho_л + 3\rho_в) = 4200 \cdot 3900 = 1{,}638 \cdot 10^7\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot {}^\circ\text{C}}.$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{3{,}015 \cdot 10^8 + 1{,}638 \cdot 10^7 \cdot 75}{3{,}015 \cdot 10^8 + 1{,}638 \cdot 10^7 \cdot 32} = \frac{1{,}530 \cdot 10^9}{8{,}257 \cdot 10^8} \approx 1{,}85.$$

Обратите внимание.

- Соотношение 3 : 1 дано по объёму, а не по массе: плотность льда меньше плотности воды (из-за 900 и 1000 кг/м^3), поэтому по массе лёд составляет $\dfrac{900}{900+3000} \approx 23\,\%$, а не 25 %.
- Теплота плавления льда — это постоянная добавка $\frac{1}{4}\lambda\rho_л$ к q, не зависящая от t; отношение скоростей поэтому меньше отношения температур $t_2/t_1 \approx 2{,}34$.

Проверка. Размерность: q — Дж/м^3, $P = qSv$ — Дж/м^3·м^2·м/с = Вт. Предел: без льда ($\lambda\rho_л \to 0$ и вода только нагревается) $q \propto t$ и $v_1/v_2 = t_2/t_1 = 75/32 \approx 2{,}34$; наличие льда прибавляет к q постоянную часть, и отношение уменьшается до 1,85, оставаясь больше единицы — Пете (горячее на выходе) нужно закачивать смесь медленнее. Смысл: при заданной одинаковой мощности чем больше нагрев на выходе, тем меньше смеси требуется.

Ответ. $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\lambda\rho_л + c(\rho_л + 3\rho_в)\,t_2}{\lambda\rho_л + c(\rho_л + 3\rho_в)\,t_1} \approx 1{,}85.$