Три омметра в цепи

Задача 8. [МОШ 2016/17, 9 класс, задача 8] На рисунке приведена схема цепи, состоящей из трех одинаковых омметров Ω, с помощью которых измеряется неизвестное сопротивление R резистора. Полярность включения у всех омметров одинаковая. Один из омметров показывает сопротивление $R_1 = 100$ Ом, а другой $R_2 = 800$ Ом. Каковы показания R_3 третьего омметра? Чему равно сопротивление R резистора?

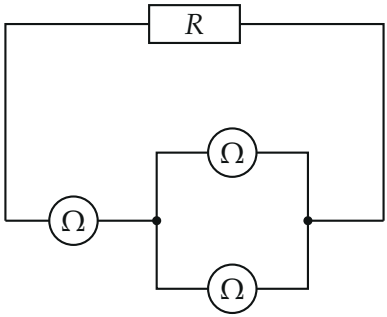
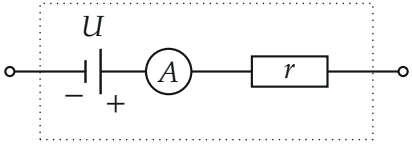


Рис. 1. Рисунок условия: одиночный омметр, два параллельных омметра и резистор R в одном контуре

▲ **Решение.** **Что происходит.** Омметр — это маленькая цепь: идеальный источник U, резистор r и идеальный амперметр, соединённые последовательно. Он измеряет ток I и пересчитывает его в сопротивление: если к его клеммам подключён резистор R_x, то $I = U/(r + R_x)$, и прибор показывает $R_x = U/I - r$. В нашей цепи у омметров общий контур, и их источники включены одинаково, то есть действуют *согласованно*. Каждый омметр, не зная об этом, по-прежнему считает показание по формуле $R_{\text{пок}} = U/I_{\text{омм}} - r$, где $I_{\text{омм}}$ — ток через него. Токи в омметрах разные: через одиночный течёт полный ток I, а два одинаковых омметра в параллельных ветвях делят его поровну. Ключевые законы: показание омметра, закон сохранения заряда в узле (токи $I = I/2 + I/2$) и второе правило Кирхгофа для контура.

Обозначения. I — ток в неразветвлённой части цепи (через одиночный омметр и резистор R), $I/2$ — ток через каждый из двух параллель-

ных омметров, r и U — внутреннее сопротивление и напряжение источника омметра, $R_о$ — показание одиночного омметра, $R_п$ — показание каждого из параллельных.



$$R_{пок} = U/I - r$$

Рис. 2. Модель омметра: источник U (длинная пластина — плюс), амперметр A и резистор r последовательно; пунктиром обведён прибор, кружки — клеммы

1. Показания через токи. Одиночный омметр: через него течёт полный ток I, поэтому

$$R_о = \frac{U}{I} - r.$$

Каждый из двух параллельных омметров одинаков и стоит в одинаковых условиях — токи в их ветвях равны, и по закону сохранения заряда в узле $I = I_2 + I_3 = 2I_2$, то есть $I_2 = I/2$:

$$R_п = \frac{U}{I/2} - r = \frac{2U}{I} - r.$$

Исключим U/I:

$$R_п + r = 2\,(R_о + r) \;\Rightarrow\; R_п = 2R_о + r > R_о.$$

Значит, среди показаний есть два *равных* (оба параллельных омметра), а одиночный показывает меньшее значение. По условию два показания — 100 Ом и 800 Ом. Меньшее, 100 Ом, — у одиночного: $R_о = 100$ Ом, а 800 Ом — у параллельных. Третий омметр — второй из параллельной пары, он показывает тоже 800 Ом. Тогда $R_3 = 800$ Ом.

2. Внутреннее сопротивление. Из связи показаний

$$r = R_п - 2R_о = 800 - 2 \cdot 100 = 600 \text{ Ом}, \qquad \frac{U}{I} = R_о + r = 700 \text{ Ом}.$$

3. Контур и сопротивление R. Второе правило Кирхгофа для контура «одиночный омметр — один из параллельных — резистор R»: сумма ЭДС равна сумме падений напряжения. Источники включены одинаково, поэтому ЭДС складываются ($U + U$); падения — на r одиночного омметра (ток I), на r параллельного (ток $I/2$) и на R (ток I):

$$U + U = I\,r + \frac{I}{2}\,r + I\,R \;\Rightarrow\; \frac{2U}{I} = \frac{3}{2}\,r + R.$$

Отсюда

$$R = \frac{2U}{I} - \frac{3}{2}\,r = 2 \cdot 700 - \frac{3}{2} \cdot 600 = 1400 - 900 = 500\ \text{Ом}.$$

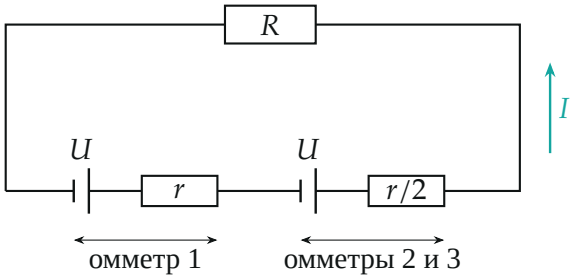


Рис. 3. Контур Кирхгофа: источники омметра 1 и параллельной пары действуют в одном направлении ($U+U$); внутренние сопротивления r и $r/2$ (пара параллельных r даёт половину) и R в одном контуре; ток I в контуре

Проверка. Возьмём $U/I = 700$ Ом, то есть $U = 700$ В при $I = 1$ А. Одиночный омметр показывает $700/1 - 600 = 100$ Ом, параллельные — $700/0{,}5 - 600 = 800$ Ом, в согласии с условием. Контур: $2U = 1400$ В, падения $1 \cdot 600 + 0{,}5 \cdot 600 + 1 \cdot 500 = 1400$ В — сходится. Размерность: все величины в омах. Смысл: источники омметров помогают друг другу, поэтому омметры «думают», что сопротивление цепи меньше, чем оно есть на самом деле (показание одиночного 100 Ом при реальных $R + r/2 = 800$ Ом).

Обратите внимание.

- Показание омметра определяется током *через него*, а не сопротивлением участка, поэтому параллельные омметры и одиночный дают разные значения, хотя приборы одинаковы.
- «Полярность одинаковая» означает, что источники в контуре действуют в одну сторону (складываются); при встречном включении ЭДС вычитались бы.

Ответ. $R_3 = 800$ Ом; $R = 500$ Ом.