Грузы на призме с нитью

Задача 1. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 1] На подставку в форме прямой четырёхугольной призмы (в основании ромб $ABCD$, $\angle ABC = \alpha$, боковые грани — прямоугольники) кладут два маленьких груза, связанных тонкой невесомой натянутой нитью, и отпускают их. Трения нет. Массы грузов одинаковы. Середина нити (точка P) движется по диагонали DB. Грузы движутся по прямым линиям симметрично относительно плоскости $BB'D'D$. Найдите модули ускорений грузов и модуль ускорения середины нити. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

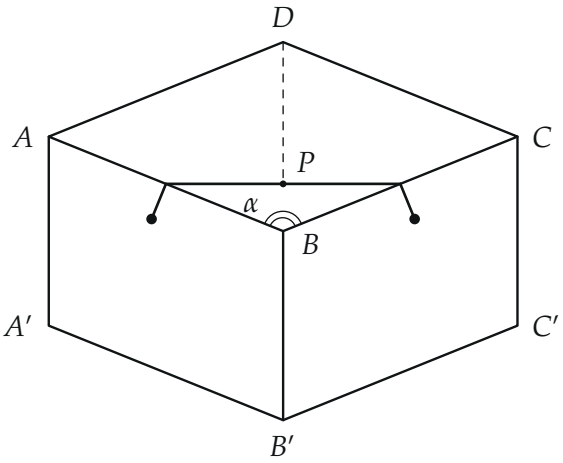
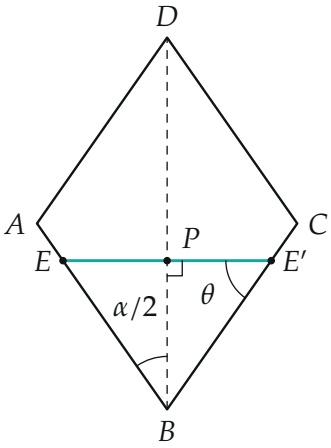


Рисунок условия.

▲ **Решение. Что происходит.** Нить лежит на верхней грани и перегибается через два горизонтальных ребра AB и BC; на боковых гранях висят грузы. Рёбра гладкие, нить по ним скользит, и натяжение T вдоль всей нити одно и то же. Грузы вытягивают нить, её середина P едет к вершине B. Идей две. Первая: на гладком ребре сила натяжения вдоль ребра не меняется, отсюда угол нити на боковой грани. Вторая: длина нити постоянна, отсюда направление движения груза и связь его скорости со скоростью P. Класс задачи: нерастяжимая нить и движение по гладкой плоскости.

Обозначения. E — точка, где нить переходит с верхней грани на боковую, $e = BE$; s — длина висящей части нити на боковой грани; φ — угол этой части с вертикалью; L — полная длина нити; M — груз.

1. Нить на верхней грани. По условию P движется по диагонали DB, а картина симметрична относительно плоскости $BB'D'D$. Поэтому участок нити на верхней грани перпендикулярен диагонали BD (диагонали ромба перпендикулярны, и этот участок параллелен AC). Диагональ BD делит угол α пополам, значит в прямоугольном треугольнике BPE угол при B равен $\alpha/2$, а угол θ между нитью и ребром AB равен $90° - \alpha/2$.

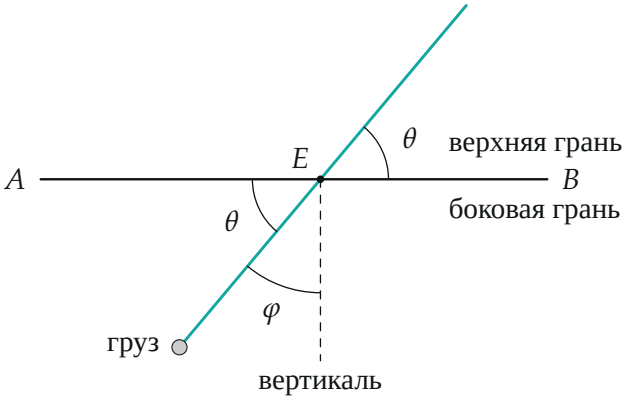


Вид сверху: нить перпендикулярна диагонали BD, угол $\theta = 90° - \alpha/2$.

2. Нить на боковой грани. Выделим маленький кусочек нити, лежащий на ребре. Он невесомый, поэтому сумма сил на него равна нулю. На него действуют два натяжения T (по каждой из частей нити) и реакция гладкого ребра, перпендикулярная ребру. Спроецируем на направление ребра: реакция даёт нуль, а части нити уходят от кусочка в разные стороны вдоль ребра, поэтому

$$T\cos\theta - T\cos\theta_{\text{гр}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{гр}} = \theta,$$

где $\theta_{\text{гр}}$ — угол между частью нити на боковой грани и ребром. На развёртке двух граней в одну плоскость нить — прямая.



Развёртка двух граней в одну плоскость: нить — прямая, угол φ с вертикалью дополняет θ до $90°$.

Ребро горизонтально, а боковая грань вертикальна, поэтому вертикаль лежит в грани и перпендикулярна ребру. Тогда

$$\varphi = 90° - \theta = \frac{\alpha}{2}.$$

Он одинаков в любой момент: его задаёт только форма призмы.

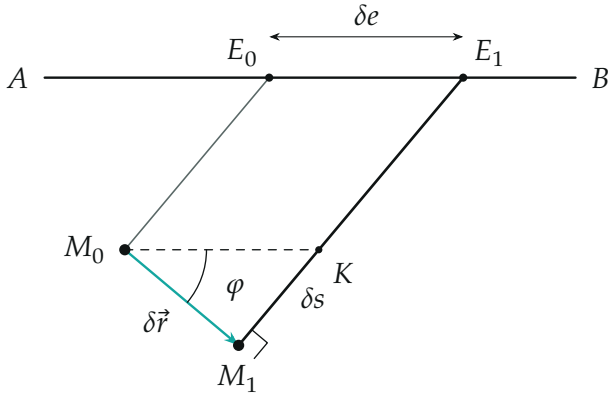
3. Связь длины нити. Участок на верхней грани равен $EE' = 2e\sin\dfrac{\alpha}{2} = 2e\sin\varphi$, поэтому

$$L = 2e\sin\varphi + 2s = \text{const}.$$

Пусть точка E сдвинулась к B на малое δe, а висящая часть удлинилась на δs. Тогда $-2\sin\varphi\,\delta e + 2\,\delta s = 0$, то есть

$$\delta s = \delta e\,\sin\varphi.$$

4. Куда смещается груз. Груз находится на нити на расстоянии s от E. Нарисуем грань в плоскости чертежа (вид снаружи): ребро горизонтально, B справа. Старое положение — E_0M_0, новое — E_1M_1, причём $E_0E_1 = \delta e$, $E_1M_1 = s + \delta s$. Отложим на новой нити $E_1K = s$: тогда M_0K параллельно ребру (получился параллелограмм $E_0E_1KM_0$) и $M_0K = \delta e$, а $KM_1 = \delta s$.



Смещение груза за малое время: $\delta\vec{r} = \overrightarrow{M_0M_1}$.

В треугольнике M_0KM_1 гипотенуза $M_0K = \delta e$, катет $KM_1 = \delta s = \delta e \sin\varphi$ и угол между ними $90° - \varphi$ (нить образует с ребром угол $90° - \varphi$): $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi = \delta s/\delta e$, значит угол при M_1 прямой. Итак, смещение груза M_0M_1 перпендикулярно нити, составляет с горизонталью угол φ (вниз, к B) и равно по модулю

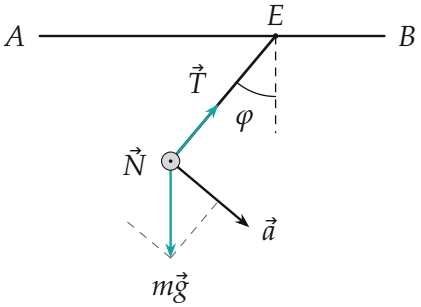
$$\delta r = \delta e \cos\varphi.$$

Направление не зависит от момента, поэтому груз едет по прямой, как и сказано в условии.

5. Ускорение груза. Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на прямую, по которой он едет (направлена вниз к B под углом φ к горизонту). На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$, натяжение $\vec{T}$ вдоль нити и реакция грани $\vec{N}$ (перпендикулярна грани, трения нет). Нить перпендикулярна прямой движения, поэтому T на неё не проецируется; N перпендикулярна плоскости грани и тоже на прямую не проецируется. Остаётся сила тяжести: её проекция на прямую равна $mg\sin\varphi$.

Отсюда

$$ma = mg\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\frac{\alpha}{2}.$$



Боковая грань (вид снаружи). $\vec{N}$ направлена на нас, перпендикулярно грани.

Вдоль нити $T = mg\cos\varphi > 0$: нить действительно натянута.

Обратите внимание: груз едет не вдоль нити и не по вертикали, а по прямой, перпендикулярной нити. Нить натянута, но груз не разгоняет: T перпендикулярна скорости.

6. Ускорение середины нити. Точка P лежит на диагонали, и из треугольника BPE (рисунок выше) $BP = e\cos\dfrac{\alpha}{2} = e\cos\varphi$. При сдвиге E к B на δe точка P приближается к B на $\delta e\cos\varphi$. Это ровно то же расстояние, на которое за то же время сместился груз: $\delta r = \delta e\cos\varphi$. Значит, в любой момент скорость точки P равна скорости груза, и ускорения тоже равны:

$$a_P = a = g\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Проверка. Размерность: $g\sin(\alpha/2)$ — м/с^2. Второй способ для груза — энергия: нить и гладкое ребро работы не совершают, груз при смещении δr вдоль прямой опускается на $\delta r\sin\varphi$, поэтому $\delta(\frac{1}{2}mv^2) = mg\sin\varphi\,\delta r$ и $a = g\sin\varphi$, как и выше. Пределы: $\alpha \to 180°$ (грани сливаются в стену, нить горизонтальна) — $a \to g$, $T \to 0$, грузы падают почти свободно; $\alpha \to 0$ (узкий клин) — $a \to 0$, $T \to mg$: груз висит на почти вертикальной нити.

Смысл: нить на гладких рёбрах сама выбирает направление, при котором не мешает грузам скользить под углом $\alpha/2$ к горизонту.

Ответ. $a_1 = a_2 = a_P = g\sin\dfrac{\alpha}{2} = 10\sin\dfrac{\alpha}{2}$ м/с^2 — ускорения обоих грузов и середины нити одинаковы по модулю.