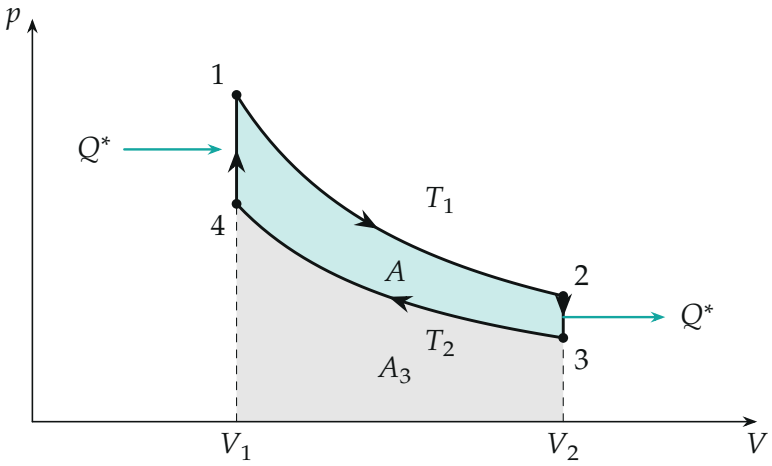
Цикл Стирлинга с регенератором

Задача 2. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 2] Цикл Стирлинга состоит из двух изохор и двух изотерм. Для увеличения КПД этого цикла используют регенератор — тепловой резервуар, которому рабочее тело (идеальный газ) отдаёт некоторое количество теплоты Q^* при изохорном охлаждении, и от которого получает такое же количество теплоты Q^* при изохорном нагревании. Эффективность регенератора характеризуется коэффициентом $k = Q^*/Q_V$, где Q_V — полное количество теплоты, получаемое рабочим телом на участке изохорного нагревания. КПД цикла зависит от коэффициента регенерации k.

Пусть КПД некоторого цикла Стирлинга с регенерацией изменяется от минимально возможного значения $1/6$ до максимально возможного значения $1/3$ в зависимости от коэффициента k.

1. Во сколько раз максимальная температура газа в течение этого цикла больше минимальной температуры?
2. Определите КПД этого цикла при коэффициенте регенерации $k = 1/2$ (при тех же температурах нагревателя и холодильника).

Ответы должны быть даны в виде чисел.



Поясняющий рисунок: цикл в координатах p–V (T_1 — нагреватель, T_2 —

холодильник). Бирюзовая площадь — работа цикла A, серая — работа A_3 над газом на нижней изотерме.

▲ **Решение. Что происходит.** Газ расширяется при высокой температуре T_1 (изотерма $1 \to 2$, тепло берётся у нагревателя), охлаждается при постоянном объёме ($2 \to 3$), сжимается при низкой температуре T_2 ($3 \to 4$) и нагревается при постоянном объёме ($4 \to 1$). Регенератор запасает Q^* при охлаждении и возвращает ту же Q^* при нагревании, поэтому нагреватель эту часть не оплачивает. Главная идея: КПД равен работе цикла, делённой на теплоту, взятую именно у нагревателя. Из $k = 1$ найдём отношение температур, из $k = 0$ — отношение теплоты изохоры к работе, и всё выразится через одну величину A. Класс задачи: КПД цикла — учёт того, откуда берётся теплота.

Обозначения. T_1, T_2 — температуры нагревателя и холодильника: это максимальная и минимальная температуры газа; $r = V_2/V_1$; A — работа за цикл; Q_{T1} — теплота, полученная на изотерме $1 \to 2$; Q_V — полная теплота изохорного нагревания $4 \to 1$, $Q^* = kQ_V$.

1. Теплота от нагревателя. Газ получает теплоту на изотерме $1 \to 2$ и на изохоре $4 \to 1$. На изохоре часть $Q^* = kQ_V$ даёт регенератор, остальное $(1-k)Q_V$ — нагреватель. Поэтому

$$Q_{\text{н}} = Q_{T1} + (1-k)\,Q_V, \qquad \eta(k) = \frac{A}{Q_{T1} + (1-k)\,Q_V}.$$

Обратите внимание: Q^* в знаменатель не входит — нагреватель её не отдаёт, она ходит по кругу внутри установки. Чем больше k, тем меньше $Q_{\text{н}}$, поэтому КПД растёт с k: наибольший при $k = 1$, наименьший при $k = 0$.

2. Работа на изотермах. На изохорах работа нулевая. На изотерме $T = \text{const}$ внутренняя энергия идеального газа не меняется, значит вся полученная теплота идёт в работу: $Q_{T1} = A_1$. Работа газа — площадь под гиперболой $p = \nu RT/V$ между V_1 и V_2; при одинаковых V_1, V_2 площадь пропорциональна T:

$$A_1 = \nu RT_1 \ln r, \qquad A_3 = \nu RT_2 \ln r, \qquad \frac{A_3}{A_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

$$A = A_1 - A_3 = \nu R(T_1 - T_2)\ln r = Q_{T1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Работа цикла — бирюзовая площадь между гиперболами (рисунок).

3. Пункт 1: отношение температур. При $k = 1$ теплоту дают только изотерма и регенератор: $Q_н = Q_{T1}$, и

$$\eta_{\max} = \frac{A}{Q_{T1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{3}.$$

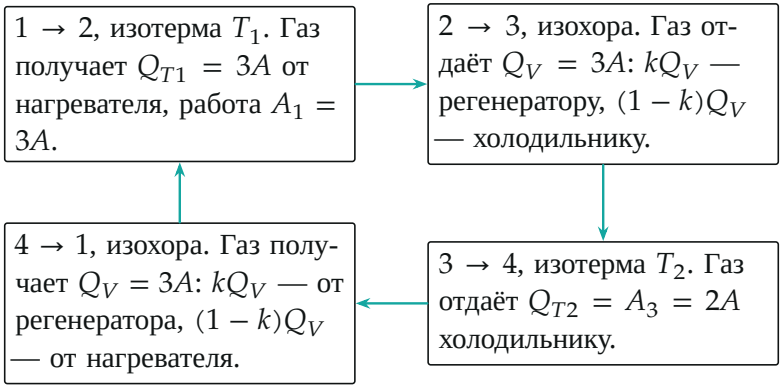
Это КПД цикла Карно с теми же температурами. Отсюда $T_2/T_1 = 2/3$ и $T_1/T_2 = 1{,}5$.

4. Пункт 2: КПД при $k = 1/2$. Нужно знать Q_V в единицах A. Из шага 3: $A/Q_{T1} = 1/3$, то есть $Q_{T1} = 3A$. При $k = 0$ регенератора нет, $Q_н = Q_{T1} + Q_V$ и по условию $\eta_{\min} = 1/6$:

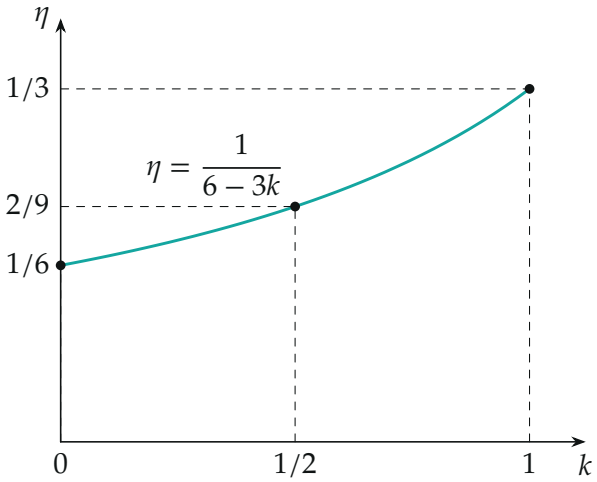
$$\frac{A}{3A + Q_V} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad Q_V = 3A.$$

Значит $Q_н(k) = 3A + (1-k)\cdot 3A = (6-3k)A$ и $\eta(k) = \dfrac{1}{6-3k}$. При $k = 1/2$ нагреватель отдаёт $3A + \frac{3}{2}A = 4{,}5A$, откуда

$$\eta\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{A}{4{,}5A} = \frac{2}{9} \approx 0{,}22.$$



Тепловые потоки цикла за один оборот в единицах A (при $T_1/T_2 = 3/2$, $\eta_{\min} = 1/6$). Холодильник получает $Q_{T2} + (1-k)Q_V$, и $A = Q_н - Q_x$ при любом k.



Зависимость КПД от коэффициента регенерации.

Проверка. Безразмерные величины, размерность не нужна. Концы: $\eta(0) = 1/6$ и $\eta(1) = 1/3$ — как в условии, $\eta(1)$ совпадает с Карно $1 - 1/1{,}5 = 1/3$; $2/9$ лежит между ними, как и должно быть при росте КПД с k. Второй способ: холодильнику достаётся $Q_{T2} + (1-k)Q_V = 2A + 1{,}5A = 3{,}5A$ при $k = 1/2$, и баланс $A = 4{,}5A - 3{,}5A$ сходится. Согласованность данных: $Q_V = C_V(T_1 - T_2) = 3A = 3\nu R(T_1 - T_2)\ln r$ даёт $C_V = 3\nu R \ln r$; для одноатомного газа $\ln r = 1/2$, $V_2/V_1 \approx 1{,}65$ — реалистичный цикл.

Смысл: регенератор не меняет работу цикла, он лишь сокращает расход тепла у нагревателя; при $k = 1$ цикл Стирлинга достигает Карно.

Ответ. 1) максимальная температура газа в 1,5 раза больше минимальной; 2) $\eta(1/2) = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}22$.