Заряженная полусфера у стенки

Задача 3. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 3] Однородную полусферу радиусом R и массой m, равномерно заряженную по поверхности зарядом q, приложили основанием к вертикальной протяжённой металлической плоской стене (см. рисунок). Заряды по сфере не перераспределяются.

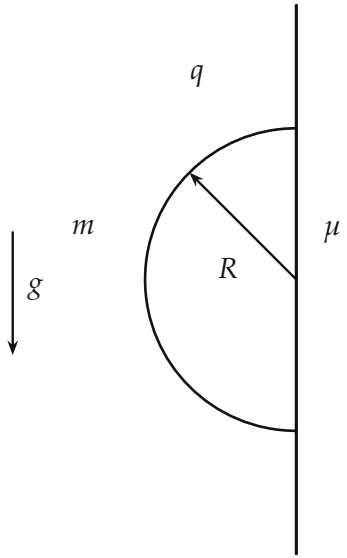


Рисунок условия.

1. С какой силой полусфера притягивается к стене?
2. При каком коэффициенте трения μ между стеной и полусферой она будет покоиться, «прилипнув» к стене?
3. При каких значениях массы полусферы при заданном коэффициенте трения $\mu < 1$ полусфера будет скользить вниз вдоль стены, не отрываясь от неё?

Центр масс однородной полусферы находится на расстоянии $R/2$ от центра её основания.

▲ **Решение. Что происходит.** Стена металлическая, поэтому на ней наводятся заряды, и они притягивают полусферу. Поле наведённых зарядов перед стеной такое же, как у зеркального изображения полусферы с

зарядом $-q$ за стеной — метод изображений. Притяжение к стене есть сила взаимодействия полусферы с этим изображением, а она по модулю равна силе отталкивания двух половинок равномерно заряженной сферы. Дальше обычная механика: прижимающая сила F создаёт нормальную реакцию, от неё зависит максимальное трение. Класс задачи: метод изображений плюс статика и динамика с трением.

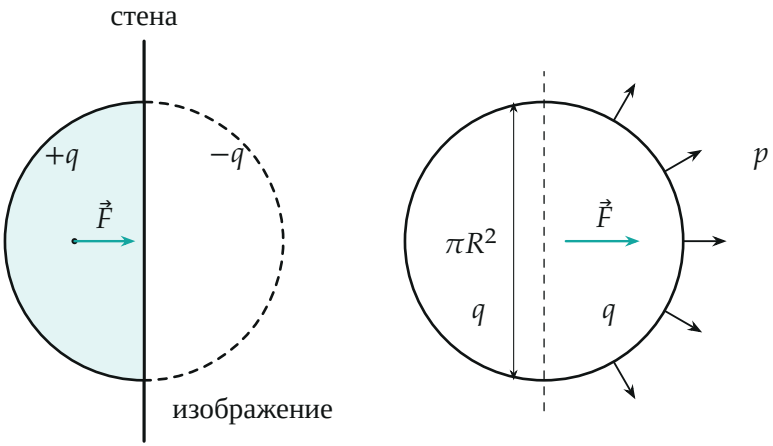
Обозначения. O — центр основания, C — центр масс (на оси на расстоянии $R/2$ от O), F — сила притяжения к стене, N — нормальная реакция стены, $F_{\text{тр}}$ — сила трения. Ось x направим от стены, ось z — вверх.

1. Сила притяжения. Пусть за стеной находится зеркальная полусфера с зарядом $-q$. Вместе с настоящей они образуют сферу радиуса R, у которой половинки заряжены разноимённо. Сила, с которой изображение действует на полусферу, равна силе, с которой стена действует на неё. Если бы у изображения был заряд $+q$, расстояния между зарядами остались бы теми же, и сила имела бы то же значение по модулю, но стала бы отталкивающей. Значит, F равна силе, с которой отталкиваются две половинки равномерно заряженной сферы с зарядом $2q$.

Найдём эту силу. Заряд $2q$ распределён по сфере с поверхностной плотностью $\sigma = \dfrac{2q}{4\pi R^2} = \dfrac{q}{2\pi R^2}$. У поверхности поле снаружи равно σ/ε_0, внутри нулю. На заряд маленького кусочка действует поле всех остальных зарядов, то есть среднее арифметическое $\sigma/(2\varepsilon_0)$. Поэтому на единицу площади действует направленная наружу сила («давление»)

$$p = \sigma \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.$$

Сложим силы на все кусочки одной половинки вдоль оси: кусочек площади dS, нормаль к которому составляет угол ϑ с осью, даёт $p\,dS\cos\vartheta$, а сумма $\sum dS\cos\vartheta$ — это площадь проекции половинки на плоскость разреза, то есть πR^2.



Слева: настоящая полусфера и её изображение (пунктир), $\vec{F}$ — сила притяжения. Справа: сфера с зарядом $2q$, разрезанная пополам; стрелки — силы $p\,dS$ на кусочки правой половины, $\vec{F}$ — их равнодействующая.

Итак,

$$F = p \cdot \pi R^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi R^2 = \frac{q^2}{4\pi^2 R^4} \cdot \frac{\pi R^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Обратите внимание: это не кулоновская сила между двумя точечными зарядами q на расстоянии $2R$ (она вдвое меньше, $q^2/(16\pi\varepsilon_0 R^2)$): заряд распределён по поверхности, и ближние кусочки взаимодействуют сильнее.

2. Покой. На полусферу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ в точке C, притяжение $\vec{F}$ к стене, реакция стены $\vec{N}$ (перпендикулярна стене) и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (вдоль стены). Если полусфера покоится, сумма сил равна нулю. Проекция на ось x (перпендикулярно стене): $N = F$. Проекция на z: $F_{\text{тр}} = mg$. Трение покоя ограничено: $F_{\text{тр}} \le \mu N$, то есть

$$mg \le \mu F \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{mg}{F} = \frac{8\pi\varepsilon_0\, mgR^2}{q^2}.$$

3. Скольжение и отрыв. Если $mg > \mu F$, трение покоя не удержит полусферу, она поедет вниз, и сила трения станет силой трения сколь-

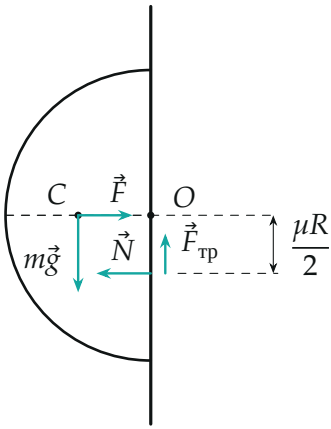
жения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Горизонтального ускорения нет, значит $N = F$. Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$ma = mg - \mu F > 0 \quad \Rightarrow \quad m > \frac{\mu F}{g} = \frac{\mu q^2}{8\pi\varepsilon_0 g R^2}.$$

Теперь проверим, что полусфера не отрывается от стены, то есть опора не «заваливается». Сила тяжести стремится повернуть полусферу верхним краем от стены. Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через O вдоль стены (горизонтально). Ось выбрана потому, что у силы трения плечо нулевое (она лежит в плоскости стены), а линия действия $\vec{F}$ по симметрии проходит через ось полусферы, то есть тоже через O. Полусфера движется поступательно с ускорением a вниз, поэтому сумма моментов равна моменту $m\vec{a}$, приложенного в центре масс. Пусть реакция N приложена на высоте z_N (отрицательна, если ниже O):

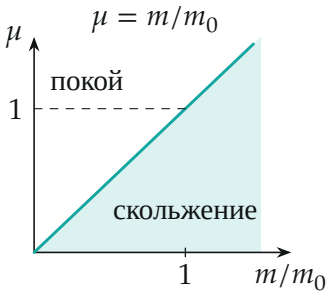
$$mg \cdot \frac{R}{2} + z_N N = ma \cdot \frac{R}{2},$$

$$z_N N = -\frac{R}{2}(mg - ma) = -\frac{R}{2}\mu N, \qquad z_N = -\frac{\mu R}{2}.$$



Скольжение вниз: реакция $\vec{N}$ приложена ниже центра основания O на $\mu R/2$.

Реакция может быть приложена в любой точке основания, то есть $|z_N| \le R$ (самое нижнее положение — нижний край основания). Здесь $|z_N| = \mu R/2 < R$ при $\mu < 2$, а по условию $\mu < 1$: опора остаётся внутри основания, полусфера прижата к стене, отрыв невозможен (он начался бы только при $\mu > 2$). В покое $z_N = -mgR/(2F)$, и опрокидывания нет, пока $mg \le 2F$.



Плоскость (m, μ) при $m_0 = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 g R^2}$: ниже прямой $\mu = m/m_0$ — скольжение, выше — покой.

Проверка. Размерность: $q^2/(\varepsilon_0 R^2)$ — это $\text{Кл}^2 \cdot \text{м}/(\Phi \cdot \text{м}^2) = \text{В} \cdot \text{Кл}/\text{м} = \text{Н}$, верно. Второй способ для силы — прямой численный расчёт: сумма кулоновских сил по парам зарядов полусферы и её изображения даёт $0{,}49\,\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (погрешность метода Монте-Карло порядка процента), а формула даёт ровно $0{,}5\,\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Границы п. 2 и п. 3 — одна и та же $m = \mu F/g$: при меньшей массе покой, при большей скольжение; при $\mu \to 0$ граница $m \to 0$, и любая полусфера скользит — как без трения.

Ответ. 1) $F = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$; 2) полусфера покоится при $\mu \ge \dfrac{8\pi\varepsilon_0 mgR^2}{q^2}$; 3) скользит вниз, не отрываясь от стены, при $m > \dfrac{\mu q^2}{8\pi\varepsilon_0 gR^2}$.