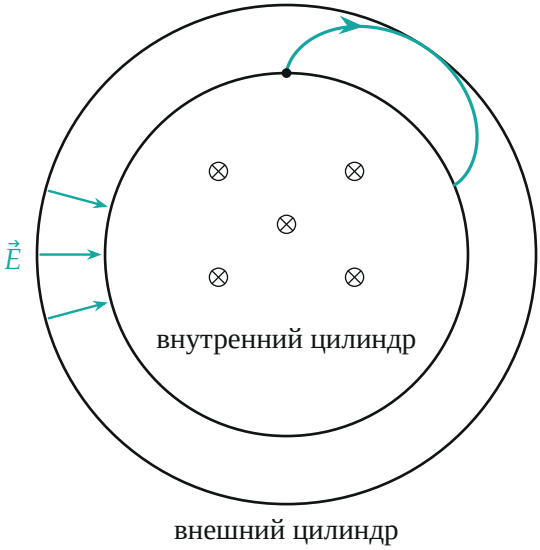
Электроны между коаксиальными цилиндрами

Задача 4. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 4] Два длинных коаксиальных цилиндра расположены внутри катушки, создающей в них однородное магнитное поле с индукцией B, направленное вдоль оси системы. К цилиндрам приложено электрическое напряжение, благодаря чему между ними возникает электрическое поле напряжённостью E, направленное от внешнего цилиндра к внутреннему вдоль их радиусов. Внутренний цилиндр разогрет и испускает электроны. Начальные скорости электронов можно считать малыми. Найдите максимальное расстояние между цилиндрами, при котором ещё возможно протекание электрического тока между ними. Расстояние между цилиндрами значительно меньше их радиусов. Масса электрона m, заряд электрона e.

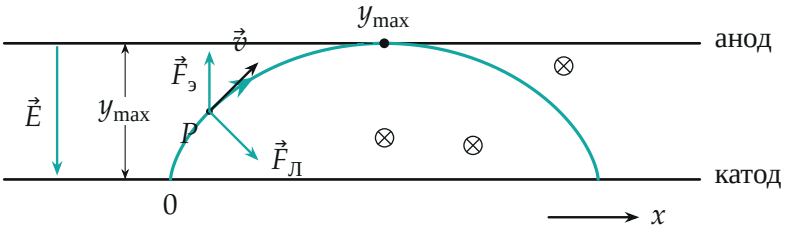


Поясняющий рисунок: сечение системы (зазор для наглядности увеличен). ⊗ — $\vec{B}$ направлена от нас. Электрон стартует с внутреннего цилиндра; траектория искривляется магнитным полем.

▲ **Решение. Что происходит.** Электрон стартует почти с нулевой скоростью. Электрическое поле разгоняет его от внутреннего цилиндра к

внешнему, магнитное поле искривляет траекторию: сила Лоренца перпендикулярна скорости, работы не совершает, но разворачивает электрон вбок. Если зазор мал, электрон повернёт обратно, не долетев до внешнего цилиндра, и ток прекратится. Предельный случай: самая высокая точка траектории только касается внешнего цилиндра. Ключевых законов два: энергия (работает только электрическая сила) и изменение импульса вдоль электродов (меняет его только магнитная сила). Класс задачи: движение заряда в скрещенных $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Обозначения. Зазор много меньше радиусов цилиндров, поэтому кривизной можно пренебречь и считать поля однородными, а электроды — плоскими. Ось y направим от внутреннего цилиндра к внешнему, ось x — вдоль поверхности. $y_{\max}$ — наибольшее удаление электрона от внутреннего цилиндра. Заряд электрона по модулю $|e|$.



Плоская модель зазора, траектория в предельном случае: вершина касается анода. Точка P — электрон в момент $v_x = v_y$; $\vec{F}_э$ — электрическая сила, $\vec{F}_Л$ — сила Лоренца.

1. Энергия. Электрон стартует с малой скоростью (считаем её нулём) от внутреннего цилиндра, $y = 0$. Запишем теорему об изменении кинетической энергии на пути от $y = 0$ до высоты y. Магнитная сила перпендикулярна скорости и работы не совершает; электрическая $|e|E$ направлена вдоль y (электрон отрицателен, а поле направлено к внутреннему цилиндру), работа равна $|e|Ey$:

$$\frac{mv^2}{2} = |e|E\,y.$$

2. Изменение скорости вдоль электродов. Сила Лоренца $\vec{F}_Л =$

$-|e|\,\vec{v}\times\vec{B}$. Её проекция на ось x равна $|e|Bv_y$ (при выбранной ориентации: $\vec{B}$ от нас, электрон дрейфует вправо). Запишем второй закон Ньютона для электрона в проекции на x за малое время dt и умножим на dt:

$$m\,dv_x = |e|B\,v_y\,dt = |e|B\,dy,$$

потому что $v_y\,dt = dy$. Сложим изменения от старта ($v_x = 0$, $y = 0$) до произвольной точки:

$$mv_x = |e|B\,y.$$

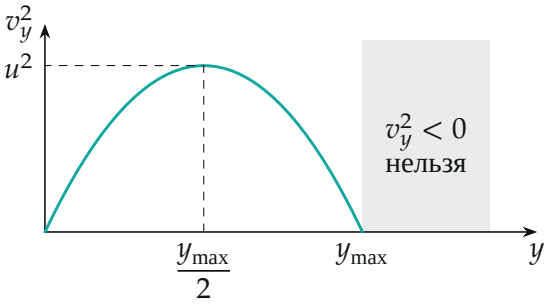
Электрическая сила вдоль x не действует, поэтому здесь она не входит.

3. Предельный случай. Ток есть, пока электрон долетает до внешнего цилиндра. Электрон повернёт обратно в самой высокой точке траектории $y = y_{\max}$, где $v_y = 0$, то есть вся скорость направлена вдоль электродов: $v = v_x$. Подставим в пункты 1 и 2:

$$\frac{mv_x^2}{2} = |e|E\,y_{\max}, \qquad v_x = \frac{|e|B\,y_{\max}}{m},$$

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{e^2B^2y_{\max}^2}{m^2} = |e|E\,y_{\max} \quad\Rightarrow\quad y_{\max} = \frac{2mE}{|e|B^2}.$$

Если зазор больше $y_{\max}$, электрон поворачивает раньше, чем достигает внешнего цилиндра, и возвращается на внутренний — тока нет. Если зазор меньше, электрон долетает. Значит, $y_{\max}$ и есть искомое максимальное расстояние (при равенстве электрон лишь касается внешнего цилиндра).



Квадрат вертикальной скорости: $v_y^2 = \left(\dfrac{|e|B}{m}\right)^2 y\,(y_{\max} - y) \geq 0$ *только при* $0 \leq y \leq y_{\max}$*; максимум* u^2*, где* $u = E/B$ *(шаг 4 ниже).*

Обратите внимание: в высшей точке скорость не нулевая — там $v_y = 0$, но $v_x \neq 0$. Поэтому нельзя искать точку, где «электрон остановится»: вся его кинетическая энергия в вершине — это энергия движения вдоль электрода.

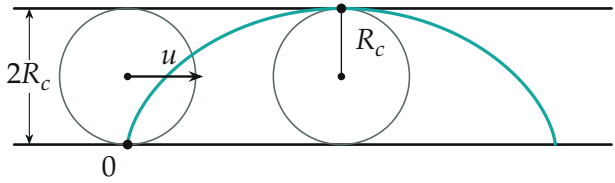
4. Второй способ: система отсчёта дрейфа. Перейдём в систему, которая движется вдоль x со скоростью $u = E/B$. Для частицы, летящей в ней со скоростью $\vec{v}'$, электрическая сила $|e|E = |e|Bu$ и магнитная сила от переносной скорости u взаимно уничтожаются, и остаётся только магнитная сила $|e|Bv'$. Она перпендикулярна скорости и не меняет её модуля, поэтому электрон движется по окружности с постоянной скоростью u и радиусом

$$R_c = \frac{mu}{|e|B} = \frac{mE}{|e|B^2}.$$

В исходной системе электрон в начале покоился, значит в системе дрейфа он стартует со скоростью u против дрейфа; магнитная сила (подстановка в $-|e|\vec{v} \times \vec{B}$) направлена при этом от катода, поэтому окружность лежит над катодом и касается его в точке старта. Самая высокая точка окружности — на высоте $2R_c$:

$$y_{\max} = 2R_c = \frac{2mE}{|e|B^2},$$

как и в первом способе. Траектория в исходной системе — циклоида: окружность радиуса R_c катится по катоду, а электрон — точка на её ободе.



Циклоида: окружность радиуса R_c *катится по катоду со скоростью цен-*

тра и $= E/B$; электрон — точка на ободе. Верхняя точка на высоте $2R_c$.

Проверка. Размерность: Тл $=$ В$\cdot$с/м^2, поэтому $\dfrac{mE}{|e|B^2} = \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{с}^2} = \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{Дж}\cdot\text{с}^2} =$ м, верно. Предельные случаи: $B \to 0$ — $y_{\max} \to \infty$, электрон идёт по полю прямо до анода при любом зазоре, как и должно быть; $E \to 0$ — $y_{\max} \to 0$: нет поля, нет разгона, электроны не уходят. Оба способа дали одно значение. Замечание: в критериях организаторов в последней строке стоит $mE/(|e|B^2)$ без двойки, это опечатка: из шагов 1 и 2 получается $2mE/(|e|B^2)$, как и в самом ответе.

Смысл: магнитное поле работает как «изолятор»: при зазоре больше $2mE/(|e|B^2)$ электроны уходят вдоль электрода и не доходят до анода.

Ответ. $y_{\max} = \dfrac{2mE}{|e|B^2}$.