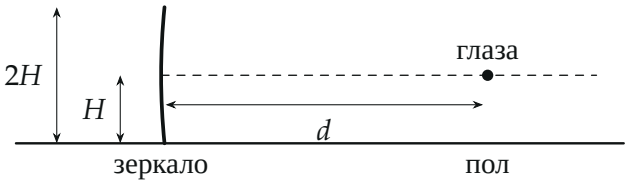
Вогнутое зеркало в комнате смеха

Задача 5. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 5] Школьник Вася пошёл в комнату смеха и обнаружил там большое круглое вогнутое зеркало, стоящее на полу и закреплённое так, что центр зеркала находился на уровне $H = 1{,}5$ м над полом, а ось симметрии зеркала была горизонтальной. Насмеявшись вдоволь, Вася заметил, что его изображение в зеркале при определённых расстояниях до него либо сильно расплывается, либо получается нечётким, и он не может себя разглядеть. Для того чтобы исследовать это явление, Вася начал приближаться к зеркалу, идя издалека вдоль его оптической оси и наблюдая при этом за изображениями своих глаз. Оцените, в каком диапазоне расстояний от глаз до центра отражающей поверхности зеркала школьник мог видеть чёткое изображение своих глаз. Диаметр зеркала $2H = 3$ м, радиус кривизны отражающей поверхности $R = 15$ м, расстояние от пола до глаз у Васи $h = H = 1{,}5$ м. Наименьшее расстояние, с которого Вася может рассматривать что-либо в подробностях (например, читать условие этой задачи), равно $a = 0{,}2$ м. Будем также считать для упрощения задачи, что бесконечно удалённые от глаз объекты Вася может разглядеть вне зависимости от их размеров.



Поясняющий рисунок: вид сбоку. Глаза Васи на оптической оси зеркала, d — расстояние от глаз до центра зеркала (рисунок не в масштабе).

▲ **Решение. Что происходит.** Высота глаз равна высоте центра зеркала, поэтому глаза лежат на оптической оси: их изображение тоже на оси, а лучи, которые его создают, идут почти вдоль оси — это параксиальные лучи, формула сферического зеркала применима. Чёткое изображение глаз Вася видит, если выполнены два условия. Во-первых, лучи от изображения должны расходиться к глазам (как от настоящего светящегося предмета): изображение лежит между глазами и зеркалом или за

зеркалом, но не за спиной у Васи. Во-вторых, изображение не ближе a к глазам. Идея: найти положение изображения по формуле зеркала и разобрать три области расстояния d. Класс задачи: сферическое зеркало плюс предел аккомодации глаза.

Обозначения. d — расстояние от глаз до центра зеркала; f — расстояние от изображения до зеркала ($f > 0$ — изображение перед зеркалом, $f < 0$ — за зеркалом); $F = R/2 = 7{,}5$ м — фокусное расстояние; l — расстояние от глаз до изображения вдоль оси.

1. Положение изображения. Формула сферического зеркала для лучей, близких к оси:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{dF}{d - F}.$$

Посмотрим, где оказывается изображение (рисунок ниже).

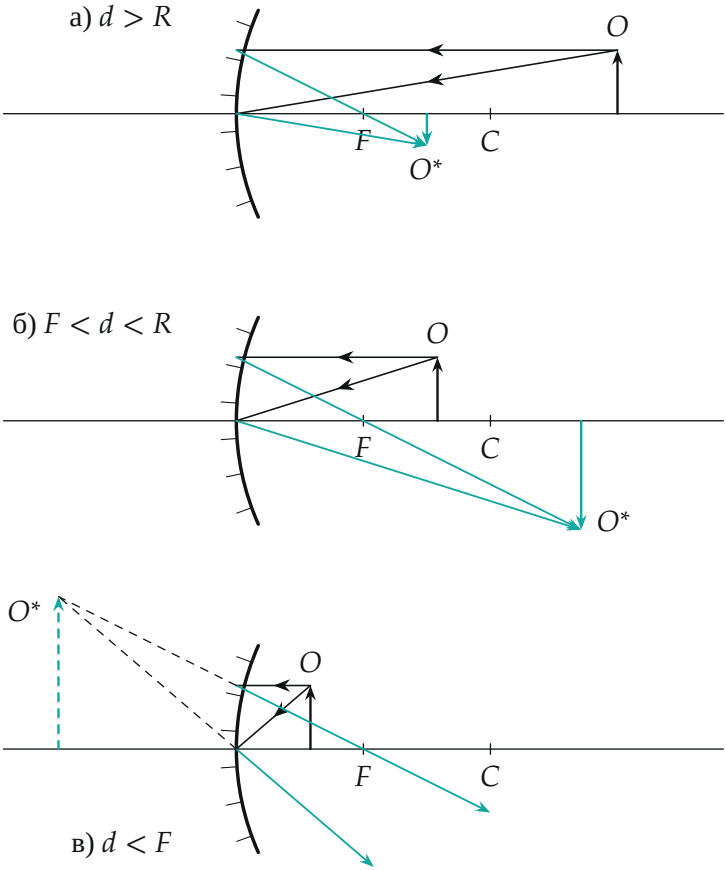
- $d > R$: $F < f < R < d$ — действительное изображение между зеркалом и глазами, лучи расходятся к глазам.
- $F < d < R$: $f > R > d$ — изображение действительное, но оно за глазами: к глазам приходят лучи, ещё не успевшие сойтись, и разглядеть такое изображение нельзя.
- $d < F$: $f < 0$ — мнимое изображение за зеркалом, лучи расходятся.

Особые точки: $d = F$ — изображение на бесконечности (лучи параллельны), по условию такое Вася разглядит; $d = R$ — изображение совпадает с глазами, расстояние до него нуль, меньше a.

2. Расстояние от глаз до изображения. В областях а) и в) изображение «впереди» глаз, и расстояние между ними

$$l = d - f = d - \frac{dF}{d - F} = \frac{d(d - 2F)}{d - F} = \frac{d\,(d - R)}{d - F}$$

(при $f < 0$ это $d + |f|$, то же выражение). Условие чёткости: $l \geq a$.



Построение изображения глаз O (рисунок не в масштабе, O — глаза, O — изображение): а) изображение между зеркалом и глазами; б) изображение за глазами; в) мнимое изображение за зеркалом (пунктир).*

3. Область $d < F$ (мнимое изображение). Здесь $d-R<0$ и $d-F<0$, значит $l = \dfrac{d(R-d)}{F-d}$. Условие $l \geq a$:

$$d(R-d) \geq a(F-d) \quad \Rightarrow \quad d^2 - (R+a)\,d + aF \leq 0.$$

Корни: $d_{1,2} = \dfrac{(R+a) \mp \sqrt{(R+a)^2 - 4aF}}{2}$. Подставим: $(R+a)^2 - 4aF = 15{,}2^2 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot 7{,}5 = 225{,}04$, корень 15,001, то есть $d_1 \approx 0{,}099$ м и

$d_2 \approx 15{,}10$ м. Неравенство верно между корнями, а в этой области $d < F = 7{,}5$ м, поэтому

$$d_1 \le d \le F, \qquad d_1 \approx \frac{a}{2} = 0{,}1 \text{ м}.$$

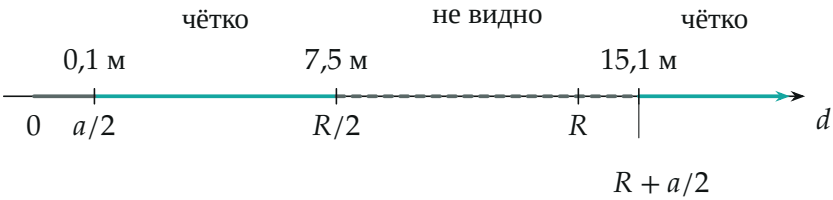
Оценка: при малом a из неравенства $dR \gtrsim aF$ получаем $d_1 \approx aF/R = a/2$.

4. Область $d > R$ (действительное изображение между зеркалом и глазами). Здесь $l = \dfrac{d(d-R)}{d-F} \ge a$, то же квадратное неравенство, но с обратным знаком:

$$d^2 - (R+a)\,d + aF \ge 0 \quad \Rightarrow \quad d \ge d_2 \approx 15{,}10 \text{ м},$$

поскольку $d_1 + d_2 = R + a$, то $d_2 = R + a - d_1 \approx R + \dfrac{a}{2}$. При $d \to \infty$ изображение в фокусе, $l \to \infty$ — чёткое.

Область $F < d < R$ исключена по шагу 1 (изображение за глазами), хотя формально l там может быть больше a. Обратите внимание: это и есть главная ловушка — одной формулы $l \ge a$ мало, нужно ещё, чтобы изображение лежало впереди глаз.



Ось расстояния d (разные участки растянуты, рисунок не в масштабе): бирюзовым — где изображение видно чётко.

5. Итог. Чёткое изображение видно при

$$\frac{a}{2} \le d \le \frac{R}{2} \quad \text{и} \quad d \ge R + \frac{a}{2},$$

то есть при $d \in [0{,}1 \text{ м};\ 7{,}5 \text{ м}]$ и $d \in [15{,}1 \text{ м};\ \infty)$.

Проверка. Размерность: все величины в метрах. Подстановка в точный l: при $d = 0{,}1$ м $f = -0{,}101$ м, $l = 0{,}201$ м; при $d = 15{,}1$ м $f = 14{,}90$ м, $l = 0{,}199$ м — на границах $l \approx a$. Предел $a \to 0$: области $[0; R/2]$ и $[R; \infty)$, а недоступна только $(R/2; R)$ — ровно та, где изображение за спиной; граница $d = R$ (изображение на глазах) исключается всегда. Смысл: близко к зеркалу глаза и их мнимое изображение слишком близки друг к другу, около центра кривизны изображение сливается с глазами, а между фокусом и центром кривизны оно уходит за спину.

Ответ. Чёткое изображение глаз видно при расстояниях от глаз до центра зеркала $d \in [a/2;\ R/2]$ и $d \in [R + a/2;\ \infty)$, то есть [0,1 м ÷ 7,5 м] и [15,1 м ÷ ∞).