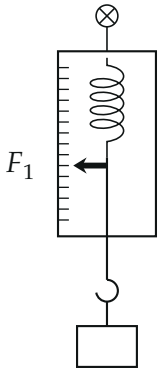
Два динамометра и груз

Задача 6. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 6] У Васи есть два совершенно одинаковых динамометра с очень лёгкими пружинами и массивными корпусами. Эти динамометры не отградуированы, но оба имеют шкалы с линейной зависимостью показаний от растяжения пружины. Если к крючку пружины динамометра подвесить груз с известной массой m, и держать динамометр за корпус вертикально, то динамометр показывает некоторое значение F_1 (см. рисунок). Если прикрепить тот же груз к корпусу динамометра и удерживать динамометр с грузом в вертикальном положении за крючок пружины, то динамометр показывает другое значение F_2 (причём $F_2 > F_1$). Вася привязал другой груз с неизвестной массой M между двумя динамометрами, и держит сверху эту конструкцию за её наивысшую точку так, что динамометры занимают вертикальное положение. При этом верхний динамометр показывает значение F_3, а нижний динамометр показывает значение F_4. Основываясь на результатах проведённых измерений, Вася вычислил массу M груза. Чему может быть равна эта масса M, если все четыре упомянутых показания динамометров различны и не равны нулю? Крючок пружины ненагруженного динамометра выступает за пределы его корпуса.



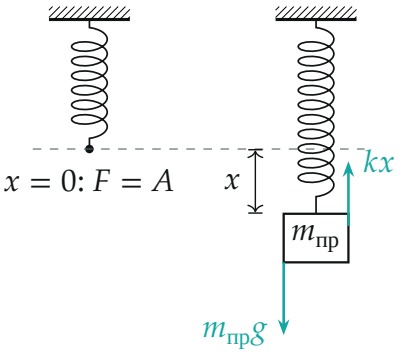
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на то, что именно показывает неотградуированный прибор, и затем на перебор расположений. Показание F — не ньютоны, а просто число на шкале. Известно лишь, что

оно линейно зависит от растяжения пружины x:

$$F = a + bx.$$

Отдельно действует закон Гука: пружина растянута силой упругости kx, а эта сила равна весу всего, что висит на её нижнем конце (тело покоится). Значит $x = \dfrac{m_{\text{пр}}g}{k}$, где $m_{\text{пр}}$ — масса всего, что висит на нижнем конце пружины, и

$$F = A + \alpha\, m_{\text{пр}}, \qquad A = a,\ \ \alpha = \frac{bg}{k}.$$



Растяжение задаёт груз на нижнем конце пружины ($kx = m_{пр}g$), а показание — шкала: $F = a + bx$; при $x = 0$ оно равно A, а не нулю.

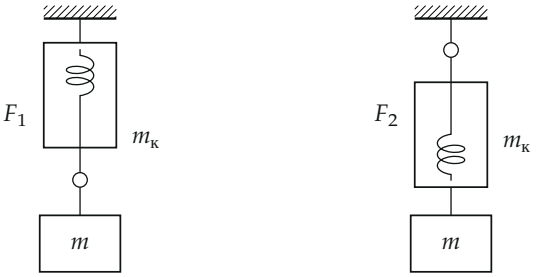
Здесь два разных вопроса: «как показание связано с растяжением» (линейно, константы неизвестны) и «как растяжение связано с нагрузкой» (закон Гука). Складывать $F = mg$ нельзя: шкала не в ньютонах.

Ключевое следствие: при $x = 0$ показание равно A, а не нулю. Поэтому динамометр, у которого на крючке ничего не висит, показывает $A \neq 0$, и условие «все показания не равны нулю» такой случай не исключает.

Обозначения. A — показание ненагруженного динамометра, α — прибавка показания на единицу массы, $m_{\text{к}}$ — масса корпуса (пружина лёгкая), M — искомая масса. Неизвестны A, α, $m_{\text{к}}$, M, а измерений

четыре ($F_1, \ldots, F_4$): нужно в каждом случае выяснить, что висит на пружине, и исключить A, α, $m_к$. Нижний конец пружины у динамометра, подвешенного за корпус, — крючок, подвешенного за крючок — корпус.

1. Измерения с грузом m**.** Рассмотрим оба опыта из условия.



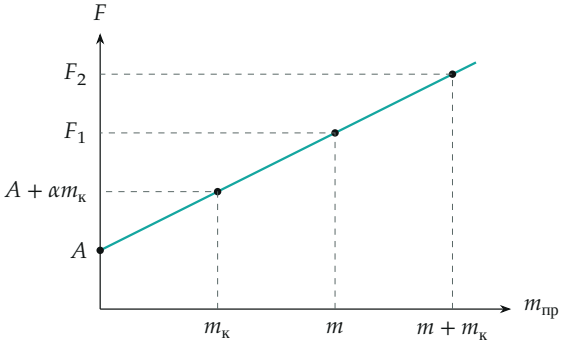
Опыт 1 — груз на крючке, динамометр держат за корпус; опыт 2 — груз прикреплён к корпусу, динамометр держат за крючок.

В первом опыте на нижнем конце пружины — груз, во втором — корпус вместе с грузом:

$$F_1 = A + \alpha m, \qquad F_2 = A + \alpha\,(m_к + m).$$

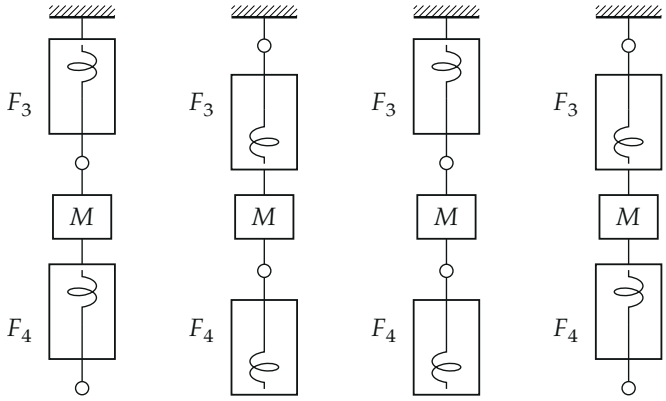
Вычитая, находим единственное, что нужно знать о корпусе:

$$\alpha m_к = F_2 - F_1. \tag{1}$$



Показание линейно растёт с массой на нижнем конце пружины; точки — известные нам измерения (числа условные).

2. Четыре способа подвесить конструкцию. Груз M привязан к каждому динамометру либо за крючок, либо за корпус, поэтому способов ровно четыре.



Крючок внизу — динамометр подвешен за корпус, крючок вверху — за крючок; F_3 — показание верхнего, F_4 — нижнего.

Груз всегда между динамометрами, поэтому каждый можно поставить двумя способами: сверху либо крючком вверх, либо корпусом вверх; так и получаются четыре картинки, и все четыре надо проверить — в условии спрошено, чему *может* быть равна масса. Для каждого способа выясним, что висит на нижнем конце пружины у верхнего и у нижнего динамометров. Верхняя пружина держит не только груз M, но и весь нижний динамометр вместе с его корпусом.

(а) Оба крючка внизу. Верхний динамометр подвешен за корпус, на его крючке — груз M и нижний динамометр (масса $m_к$), привязанный к грузу корпусом. На крючке нижнего динамометра ничего нет:

$$F_3 = A + \alpha\,(M + m_к), \qquad F_4 = A.$$

Из $F_1 = A + \alpha m$ получаем $\alpha m = F_1 - F_4$. Из $F_3 - F_4 = \alpha M + \alpha m_к$ и (1)

находим $\alpha M = F_3 - F_4 - (F_2 - F_1)$. Делим на αm:

$$M = \frac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4}\, m.$$

(б) Оба крючка вверху. Верхний динамометр подвешен за крючок, на его пружине висят корпус, груз и весь нижний динамометр: масса $2m_к + M$. Нижний висит на грузе за крючок, пружина держит только его корпус:

$$F_3 = A + \alpha\,(2m_к + M), \qquad F_4 = A + \alpha m_к.$$

Теперь $F_2 - F_4 = \alpha m$, а $F_3 - F_4 = \alpha M + \alpha m_к$, откуда с (1) $\alpha M = F_3 - F_4 - (F_2 - F_1)$ и

$$M = \frac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_2 - F_4}\, m.$$

(в) Верхний крючок внизу, нижний вверху. Верхний подвешен за корпус и держит груз и весь нижний динамометр, нижний держит за крючок только свой корпус:

$$F_3 = A + \alpha\,(M + m_к), \qquad F_4 = A + \alpha m_к.$$

Вычитание даёт $F_3 - F_4 = \alpha M$, а $F_2 - F_4 = \alpha m$, поэтому

$$M = \frac{F_3 - F_4}{F_2 - F_4}\, m.$$

(г) Верхний крючок вверху, нижний внизу. Верхний подвешен за крючок, на его пружине — корпус, груз и нижний динамометр; у нижнего (он привязан корпусом) на крючке ничего нет:

$$F_3 = A + \alpha\,(2m_к + M), \qquad F_4 = A.$$

Здесь $\alpha m = F_1 - F_4$ и $\alpha M = F_3 - F_4 - 2\alpha m_к = F_3 - F_4 - 2(F_2 - F_1)$,

откуда

$$M = \frac{2F_1 - 2F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4}\, m.$$

Обратите внимание: ненагруженный динамометр показывает A, а не нуль, потому что шкала не отградуирована, поэтому $F_4 = A$ в случаях (а) и (г) не противоречит условию $F_4 \neq 0$. Условие различия показаний нужно для знаменателей: $F_1 \neq F_4$ и $F_2 \neq F_4$. Ни в одном из четырёх случаев оно не оборачивается противоречием — все четыре расположения возможны.

Проверка. Размерность: в каждом ответе стоит безразмерное отношение разностей показаний, умноженное на m. Числовой пример: возьмём $A = 1$, $\alpha = 0{,}5$, $m = 4$, $m_к = 2$ и $M = 6$. Тогда $F_1 = 3$ и $F_2 = 4$, а пара $(F_3; F_4)$ равна $(5; 1)$ в случае (а), $(6; 2)$ в (б), $(5; 2)$ в (в) и $(6; 1)$ в (г). Подстановка в соответствующую формулу во всех четырёх случаях возвращает $M = 6$.

Какая из формул верна, зависит от того, как именно Вася подвесил груз: сами четыре показания этого не выдают, поэтому масса может принимать любое из четырёх значений.

Ответ. $M = \dfrac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4}\, m$, или $M = \dfrac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_2 - F_4}\, m$, или $M = \dfrac{F_3 - F_4}{F_2 - F_4}\, m$, или $M = \dfrac{2F_1 - 2F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4}\, m$ — в зависимости от способа подвешивания.