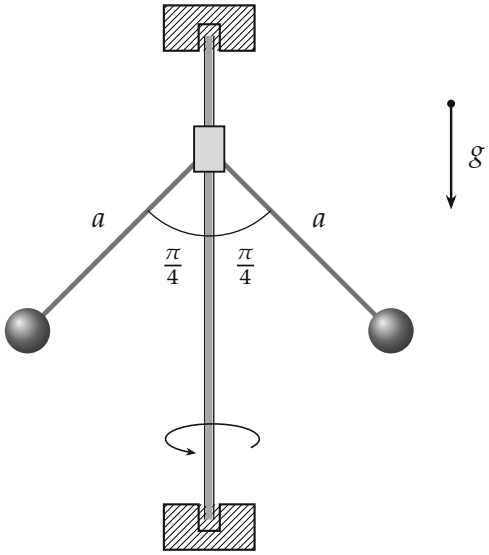
Центробежный регулятор

Задача 7. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 7] На рисунке изображена упрощённая модель центробежного регулятора. Два одинаковых тяжёлых груза при помощи лёгких жёстких стержней с длинами a и шарниров соединены с вращающимся валом, ось которого вертикальна. Конструкция шарниров позволяет стержням свободно отклоняться от этой оси, однако грузы и вал вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, которая поддерживается постоянной при помощи внешнего привода. Установившиеся при вращении равновесные положения стержней таковы, что угол между стержнями равен 90°. Определите период малых колебаний грузов относительно положения равновесия при вращении. Трения в шарнирах и в подшипниках крепления вала нет. Размеры грузов малы по сравнению с длиной стержней.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на малые колебания в системе, которая сама вращается. Шарнир качает стержень только в плоскости, вращающейся вместе с валом, поэтому оба груза колеблются одинаково и независимо. Сначала нужно понять равновесие — при какой скорости

вала стержни стоят под 45° к оси; потом слегка отклонить груз и выяснить, вернётся ли он и за какое время.

Есть соблазн сразу писать второй закон Ньютона или сохранение энергии в неподвижной системе. Оба неудобны: оси, вдоль которых раскладываются силы, вращаются вместе с грузом (через мгновение груз уже в другом месте), а энергия в неподвижной системе не сохраняется — привод вала совершает работу, поддерживая $\omega = \text{const}$. Мешает именно вращение, поэтому от него избавляются: переходят во вращающуюся вместе с валом систему отсчёта. В ней вал и плоскость стержня неподвижны, груз покоится в равновесии и колеблется по дуге окружности радиуса a вокруг шарнира. Платой за неинерциальность становится сила инерции — центробежная; сила Кориолиса перпендикулярна плоскости стержня и уравновешивается реакцией шарнира. Главная идея — записать второй закон Ньютона вдоль касательной к дуге: так неизвестное натяжение стержня в него не войдёт.

Обозначения. m — масса груза, O — шарнир, θ — угол стержня с осью вала, отсчитываемый от направления вниз; в равновесии $\theta = \theta_0 = \pi/4$. Расстояние груза от оси $R = a\sin\theta$, центробежная сила $F_{\text{ц}} = m\omega^2 R$ направлена горизонтально от оси. Единичный вектор $\vec{\tau}$ направим по касательной к дуге в сторону увеличения θ: он составляет с горизонталью угол θ и направлен вверх и от оси.

Куда направлена сила стержня. Стержень лёгкий (масса нуль) и шарнирный, поэтому суммы сил и моментов сил, приложенных к нему, равны нулю: иначе при нулевой массе он получил бы бесконечное ускорение. Если бы сила на груз была направлена поперёк стержня, равные по модулю и противоположные силы на концах давали бы ненулевой момент; если наискосок — не обнулялась бы сумма сил. Остаётся одно: силы приложены только на концах и направлены вдоль стержня, так что сила натяжения $\vec{T}$ идёт вдоль него.



а) $\sum M \neq 0$



б) $\sum \vec{F} \neq 0$

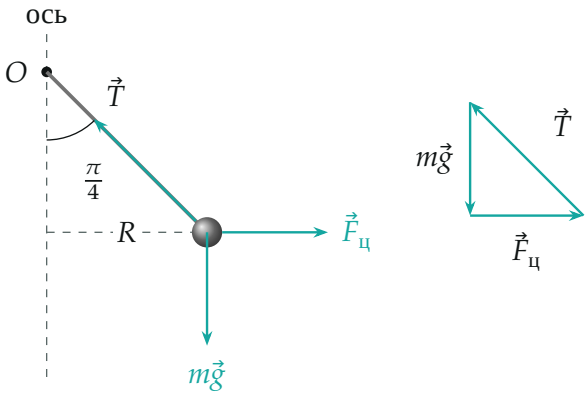
в) $\sum \vec{F} = 0,\ \sum M = 0$

Силы на концах лёгкого стержня: поперёк и навстречу — крутят его, поперёк в одну сторону — сдвигают; равновесие невесомого стержня возможно, только если силы направлены вдоль него.

О центробежной силе. В неинерциальной системе сумма сил $m\vec{g}+\vec{T}$ на покоящийся груз не равна нулю, и чтобы закон «сумма сил равна нулю» остался верным, вводят силу инерции $\vec{F}=-m\vec{a}$ ($\vec{a}$ — ускорение системы или, здесь, центростремительное ускорение, которое имел бы груз в неподвижной системе). Как в вагоне, разгоняющемся с ускорением: шарик на нити отклоняется назад, и в системе вагона его покой обеспечивает сила инерции $-m\vec{a}$. Для вращения $F_{\text{ц}}=m\omega^2R$, где R — расстояние до оси, направлена от оси.

1. Равновесие. Груз покоится во вращающейся системе, поэтому векторная сумма сил равна нулю: $m\vec{g}+\vec{T}+\vec{F}_{\text{ц}}=0$. В проекциях на вертикаль и горизонталь

$$T\cos\theta_0=mg,\qquad T\sin\theta_0=m\omega^2a\sin\theta_0.$$



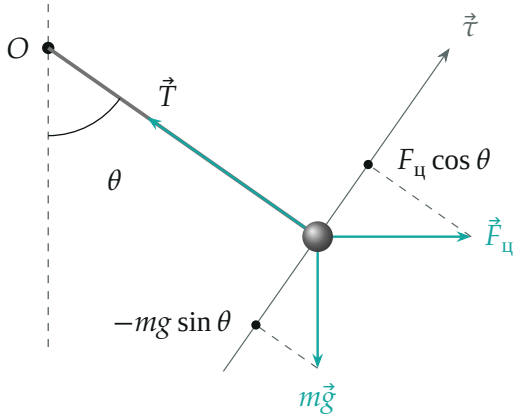
Силы на груз в равновесии и треугольник этих сил.

Из второго уравнения $T=m\omega^2a$, а из первого

$$\cos\theta_0=\frac{g}{\omega^2a}\quad\Rightarrow\quad\omega^2=\frac{g}{a\cos\theta_0}=\frac{\sqrt{2}g}{a}\qquad(\theta_0=\pi/4).\qquad(1)$$

Угол между стержнями равен 90°, значит, каждый стержень отклонён от оси на $\theta_0 = 45°$, и (1) связывает угловую скорость вала с длиной стержня.

2. Произвольный момент. Теперь груз отклонён, угол стержня равен θ. Спроецируем силы на касательную $\vec{\tau}$. Ось выбрана вдоль касательной, чтобы натяжение $\vec{T}$ (оно направлено вдоль стержня, перпендикулярно $\vec{\tau}$) в проекцию не вошло.



Груз в произвольном положении: проекции $m\vec{g}$ и $\vec{F}_ц$ на касательную $\vec{\tau}$ (пунктир — перпендикуляры к ней).

Сила тяжести составляет с касательной угол, косинус которого равен $-\sin\theta$, поэтому её проекция равна $-mg\sin\theta$ (она тянет груз к меньшим θ). Центробежная сила горизонтальна, её проекция $F_ц\cos\theta = m\omega^2 a\sin\theta\cos\theta$. Длина дуги равна $a\theta$, поэтому ускорение вдоль дуги $a\ddot{\theta}$, и второй закон Ньютона вдоль касательной

$$ma\,\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 a\sin\theta\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta} = \sin\theta\Big(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{a}\Big). \quad (2)$$

Качественная картина. Скобка обращается в нуль при $\cos\theta = g/(\omega^2 a)$, то есть в точке θ_0 из (1). При $\theta > \theta_0$ косинус меньше, скобка отрицательна, $\ddot{\theta} < 0$: груз возвращается к θ_0; при $\theta < \theta_0$ скобка положительна, и ускорение направлено к θ_0 тоже. Равновесие устойчиво, колебания возможны.

3. Малые колебания. Пусть $\theta = \theta_0 + \varphi$, $|\varphi| \ll 1$. Правую часть (2) разложим по φ до первого порядка. В точке θ_0 она равна нулю по (1), а производная равна

$$\frac{d}{d\theta}\Big[\sin\theta\Big(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{a}\Big)\Big] = \cos\theta\Big(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{a}\Big) - \omega^2\sin^2\theta.$$

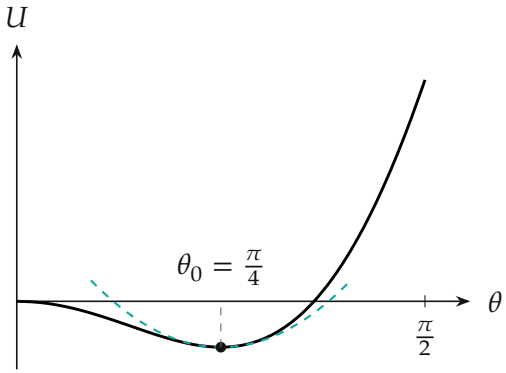
При $\theta = \theta_0$ первое слагаемое обращается в нуль (скобка равна нулю), остаётся $-\omega^2\sin^2\theta_0$. Поэтому

$$\ddot\varphi = -\omega^2\sin^2\theta_0\,\varphi, \qquad \Omega^2 = \omega^2\sin^2\theta_0 = \frac{\sqrt{2}\,g}{a}\cdot\frac{1}{2} = \frac{g}{\sqrt{2}\,a}.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой Ω, и период

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,a}{g}}.$$

Обратите внимание: центробежную силу нельзя считать постоянной. При отклонении груза расстояние R до оси меняется, и сила $m\omega^2 R$ вместе с ним. Если её «заморозить» на равновесном значении mg, получится маятник во внешнем поле $\sqrt{2}\,g$ и период меньше в $\sqrt{2}$ раз, то есть неверный.



Потенциальная энергия груза в системе вала при $\omega^2 = \sqrt{2}\,g/a$ (в единицах mga, сдвинута на $+1$); пунктир — парабола, по которой вблизи минимума

идут малые колебания.

Проверка. Второй способ — энергия в системе вала. Центробежная и тяжести потенциальны, сила Кориолиса и реакция шарнира работы не совершают, поэтому сохраняется

$$\frac{ma^2\dot\theta^2}{2} + U(\theta), \qquad U(\theta) = -mga\cos\theta - \frac{m\omega^2a^2}{2}\sin^2\theta.$$

Минимум U при θ_0, там $U'' = mga\cos\theta_0 - m\omega^2a^2\cos 2\theta_0 = mga/\sqrt{2}$ (при $\theta_0 = \pi/4$ имеем $\cos 2\theta_0 = 0$), поэтому $\Omega^2 = U''/(ma^2) = g/(\sqrt{2}\,a)$: то же самое.

Почему центробежная сила потенциальна: на малом перемещении $\Delta\vec r$ её работа равна $m\omega^2R\,\Delta R$ (в работу входит только изменение расстояния до оси: $\Delta r\cos\beta = \Delta R$), так что работа при переходе с расстояния R_1 на R_2 равна $m\omega^2(R_2^2 - R_1^2)/2$ и не зависит от пути; по замкнутому пути она нулевая. Поэтому потенциальная энергия равна $-m\omega^2R^2/2$ (нуль при $R = 0$), что и входит в $U(\theta)$. При разложении энергии надо удерживать малость до второго порядка: $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, а не единицу, иначе квадратичный член потеряется и уравнения колебаний не выйдет.

Обратите внимание: в неподвижной системе отсчёта энергию груза сохранять нельзя — привод совершает работу, поддерживая $\omega = \text{const}$; правильно только в системе вала с учётом потенциала центробежной силы.

Предельные случаи общей формулы $\Omega^2 = \omega^2\sin^2\theta_0 = \omega^2 - g^2/(\omega^2a^2)$: при $\omega^2a \to g$ (стержень опускается к оси, $\theta_0 \to 0$) получаем $\Omega \to 0$ — равновесие теряет устойчивость; при $\omega \to \infty$ груз почти в горизонтальной плоскости, $\Omega \to \omega$. Численное интегрирование уравнения (2) при $a = 1$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2 даёт период 2,3856 с, как и формула.

Физический смысл: возвращающая сила при отклонении на угол φ равна $(mg/\sqrt{2})\,\varphi$ вместо $mg\,\varphi$ у обычного маятника, поэтому период в $2^{1/4} \approx 1{,}19$ раза больше, чем у маятника длины a в поле g.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a\sqrt{2}}{g}}$.