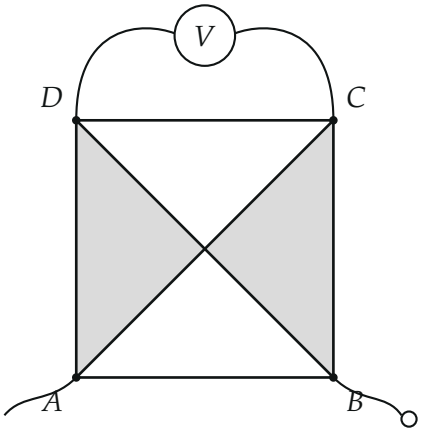
Пластина из серых и белых проводников

Задача 8. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 8] Квадратная пластина составлена из проводников двух сортов: серого и белого (см. рисунок). Удельное сопротивление белого проводника вдвое меньше, чем серого. Сопротивление пластины между вершинами A и B равно r_1. Если через эти вершины пропускать ток силой I, то идеальный вольтметр, подключённый к вершинам C и D, показывает значение напряжения U_1. После охлаждения пластины удельное сопротивление белых проводников уменьшилось вдвое, а серых — в восемь раз. Сопротивление пластины между вершинами A и B при этом стало равным r_2, а при пропускании через эти вершины прежнего тока силой I тот же вольтметр стал показывать значение U_2.



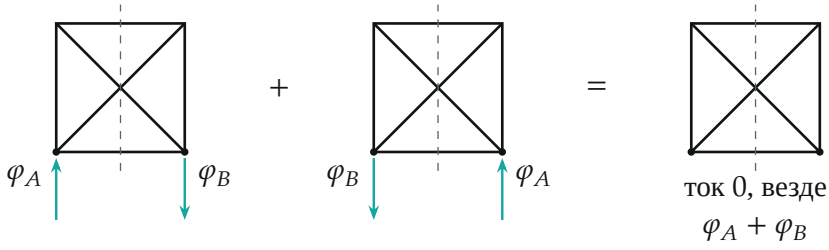
1. Найдите сопротивление пластины между вершинами B и C до её охлаждения.
2. Найдите сопротивление пластины между вершинами A и C до её охлаждения.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на цепь с непрерывным проводником: сопротивление такой пластины считать напрямую, интегрируя токи по её частям, нельзя — неизвестно даже, как течёт ток. Поэтому берём то, что можно измерить снаружи: потенциалы четырёх вершин.

Сопротивление между двумя выводами по определению равно разности их потенциалов, делённой на силу тока, так что вся задача — найти нужные потенциалы.

Три идеи делают это возможным.

1. *Суперпозиция*. Потенциалы электростатического поля в проводниках складываются при наложении полей, значит, складываются и токи (метод наложения токов): ток через резистор равен разности потенциалов его концов, делённой на R, и для суммы двух полей это даёт сумму токов.
2. *Антисимметрия*. Если пластину перевернуть относительно оси, меняющей A и B, она не изменится, но ток $A \to B$ превратится в ток $B \to A$, а потенциалы поменяют знаки. Наложив перевёрнутую картину на исходную, получаем нулевой суммарный ток, значит, везде потенциал одинаковый — равный потенциалу на самой оси. Выбрав его нулём, получаем $\varphi_B = -\varphi_A$ и $\varphi_C = -\varphi_D$. Это «плохая» симметрия: токи меняют направление. («Хорошая» симметрия оставляет токи на месте; здесь она не работает.)
3. *Подобие*. При одном и том же токе напряжение пропорционально удельному сопротивлению. Охлаждённая пластина — та же пластина, повёрнутая на 90° и с удельными сопротивлениями, меньшими в 4 раза, поэтому измерения r_2 и U_2 сообщают нам о токе через вершины B и C исходной пластины.

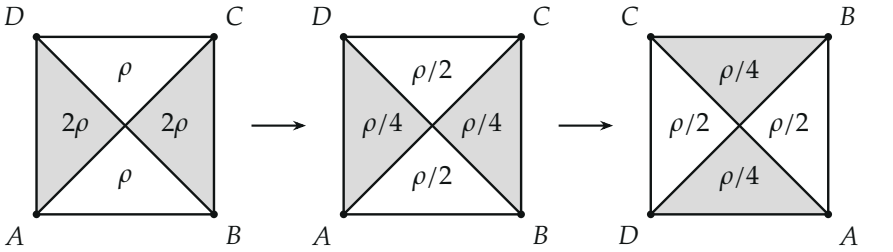


«Плохая» симметрия: пластина, отражённая относительно оси (пунктир), даёт ток $B \to A$ и переставленные потенциалы; в сумме тока нет, все потенциалы равны — и равны удвоенному потенциалу оси.

Дальше ток через A и C получается суперпозицией двух токов.

Обозначения. ρ — удельное сопротивление белого проводника до охлаждения, серого — 2ρ. φ_X — потенциал вершины X. Напряжение вольтметра понимаем как $U = \varphi_D - \varphi_C$ при токе, входящем в A (в условии полярность не указана; ответ организаторов соответствует именно ей). Потенциалы определены с точностью до постоянной, мы выбираем её удобно в каждом случае.

1. Охлаждённая пластина — повёрнутая исходная. После охлаждения серые части имеют удельное сопротивление $2\rho/8 = \rho/4$, белые — $\rho/2$.



а) исходная б) охлаждённая в) пластина б), повёрнутая

В частях пластин указаны удельные сопротивления; серые части затемнены. В (в) подписаны вершины охлаждённой пластины там, куда их унёс поворот.

Повернём охлаждённую пластину на 90° против часовой стрелки. Левая и правая части переедут вниз и наверх, вершины A, B, C, D перейдут в места вершин B, C, D, A. Теперь внизу и вверху стоят части с удельным сопротивлением $\rho/4$, слева и справа — $\rho/2$. Это в 4 раза меньше, чем в исходной пластине, где внизу и вверху ρ, а слева и справа 2ρ (рисунок, пластины (а) и (в)). Значит, пластина (в) — исходная с удельными сопротивлениями, меньшими в 4 раза; при одном и том же токе все её сопротивления и все разности потенциалов в 4 раза меньше.

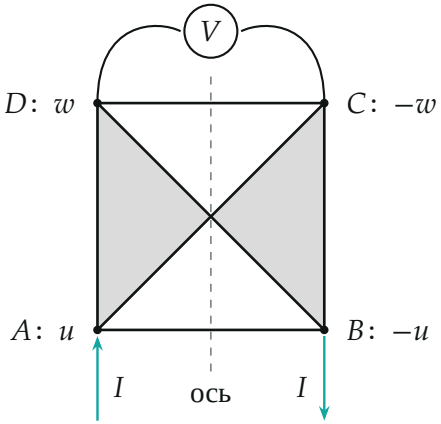
Ток I в (в) входит в вершину, стоящую на месте B исходной, и выходит из вершины на месте C. Из этого получаем два следствия:

$$r_2 = \frac{R_{BC}}{4} \quad \Rightarrow \quad R_{BC} = 4r_2, \tag{1}$$

где R_{BC} — сопротивление исходной пластины между B и C; это ответ на первый вопрос. Вольтметр охлаждённой пластины стоит между вершинами, которые в (в) оказались на местах D и A исходной пластины (вершина D охлаждённой пластины ушла на место A, а C — на место D), поэтому

$$U_2 = \frac{1}{4}(\varphi_A - \varphi_D)_{\text{исх., ток } B\to C}. \qquad (2)$$

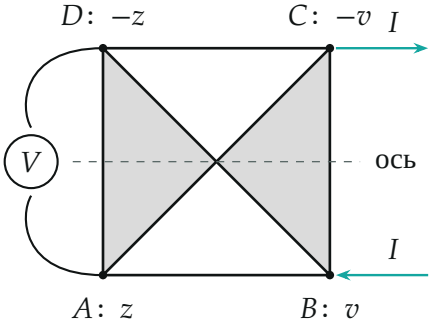
2. Ток через A и B (исходная пластина). Зеркальное отражение σ относительно вертикальной оси меняет $A \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow C$ и оставляет пластину прежней. Поле потенциалов $\varphi(P)$ при токе $A \to B$ после отражения даёт ток $B \to A$; изменив знак у потенциала, снова получим ток $A \to B$. Решение единственно с точностью до постоянной, поэтому $\varphi(P) = -\varphi(\sigma P) + \text{const}$. Нулевой уровень выберем так, чтобы постоянная была равна нулю: тогда $\varphi_B = -\varphi_A$, $\varphi_C = -\varphi_D$.



Ток $A \to B$: потенциалы вершин, $u = Ir_1/2$, $w = U_1/2$.

Из определения сопротивления $\varphi_A - \varphi_B = Ir_1$, откуда $\varphi_A = u = Ir_1/2$, $\varphi_B = -u$. Показание вольтметра $U_1 = \varphi_D - \varphi_C = 2\varphi_D$, так что $\varphi_D = w = U_1/2$ и $\varphi_C = -w$.

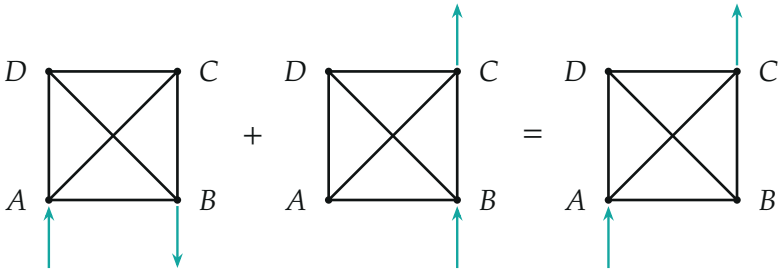
3. Ток через B и C (исходная пластина). Горизонтальная ось даёт отражение $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow C$; те же рассуждения: $\varphi_C = -\varphi_B$, $\varphi_D = -\varphi_A$.



Ток $B \to C$: $v = 2Ir_2$, $z = 2U_2$.

По (1) $\varphi_B - \varphi_C = IR_{BC} = 4Ir_2$, поэтому $\varphi_B = v = 2Ir_2$ и $\varphi_C = -v$. По (2) $4U_2 = \varphi_A - \varphi_D = 2\varphi_A$, то есть $\varphi_A = z = 2U_2$ и $\varphi_D = -z$.

4. Суперпозиция. Ток I из A в C есть сумма двух токов: I из A в B и I из B в C, — в точке B они взаимно уничтожаются. Уравнения пластины линейны, поэтому потенциалы складываются.



Ток $A \to C$ как сумма токов $A \to B$ и $B \to C$.

Разность потенциалов между A и C не зависит от выбора нулевого уровня:

$$\varphi_A - \varphi_C = (u-(-w))+(z-(-v)) = u+w+z+v = \frac{Ir_1}{2}+\frac{U_1}{2}+2U_2+2Ir_2.$$

Сопротивление $R_{AC} = (\varphi_A - \varphi_C)/I$ равно

$$R_{AC} = \frac{1}{2}(r_1 + 4r_2) + \frac{U_1 + 4U_2}{2I}.$$

Обратите внимание: знаки U_1 и U_2 заданы принятой полярностью вольтметра, $U = \varphi_D - \varphi_C$ при токе в A; при обратной полярности знак перед последней дробью сменился бы.

Проверка. Размерность: r и U/I — сопротивления. Первый ответ, $R_{BC} = 4r_2$, следует из подобия без вычислений; второй выводится независимо от первого только через потенциалы. Расчёт методом конечных элементов для такой же пластины (сетка 20×20, $\rho = 1$, ток $I = 1$) даёт $r_1 = 6{,}94$, $U_1 = 0{,}162$, $r_2 = 1{,}824$, $U_2 = 0{,}129$ в относительных единицах; прямой расчёт $R_{BC} = 7{,}2956$ совпадает с $4r_2 = 7{,}2956$, а $R_{AC} = 7{,}4573$ — с формулой $(r_1 + 4r_2)/2 + (U_1 + 4U_2)/(2I) = 7{,}4573$. Заодно положительное U_1 показывает, что принятая полярность естественна: потенциал вершины D, расположенной рядом с входом A, выше потенциала вершины C.

Смысл: охлаждённая пластина оказалась той же пластиной, повёрнутой на $90°$, поэтому второй опыт заменил измерения на стороне BC, которых у нас нет, и диагональное сопротивление собралось из двух токов.

Ответ. 1) сопротивление между B и C до охлаждения равно $4r_2$; 2) сопротивление между A и C до охлаждения равно $R_{AC} = \dfrac{1}{2}(r_1 + 4r_2) + \dfrac{U_1 + 4U_2}{2I}$.