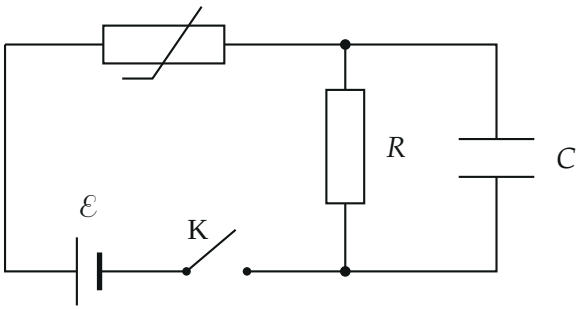
Бареттер и конденсатор

Задача 9. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 9] Нелинейный элемент бареттер обладает свойством поддерживать постоянной силу тока через себя в некотором диапазоне рабочих напряжений от U_0 до U_1 (диапазон напряжений стабилизации). Обозначим эту постоянную силу тока через I_0 (ток стабилизации). При напряжениях, меньших U_0, бареттер ведёт себя как резистор с сопротивлением $R_0 = U_0/I_0$. Бареттер на схеме цепи изображается как резистор, перечёркнутый отрезком ломаной линии, похожим на клюшку.

Используя бареттер, конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ, идеальную батарейку с ЭДС $E = 6$ В, ключ и резистор с сопротивлением R, собрали цепь, схема которой изображена на рисунке. Параметры бареттера: диапазон напряжений стабилизации от $U_0 = 2$ В до $U_1 = 6$ В, ток стабилизации $I_0 = 20$ мА. Проанализируйте процесс зарядки конденсатора после замыкания ключа при разных значениях сопротивления резистора и ответьте на следующие вопросы.

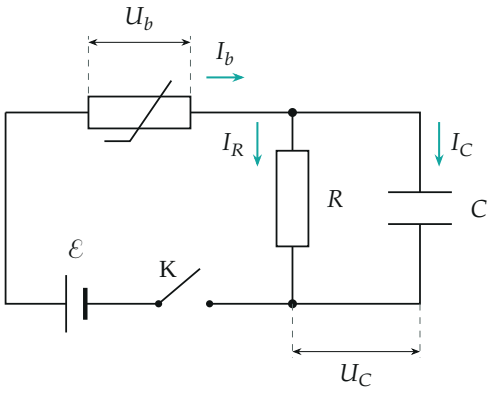


1. До какого напряжения зарядится конденсатор, если $R = 50$ Ом? А если $R = 500$ Ом?
2. Пусть $R = 200$ Ом. Чему равна сила тока, текущего через резистор в тот момент, когда скорость изменения энергии конденсатора в процессе зарядки максимальна?
3. Пусть $R = 5000$ Ом. За какое время конденсатор зарядится до половины максимального заряда?

▲ **Решение. Что происходит.** Бареттер — «стабилизатор тока»: пока напряжение на нём лежит в диапазоне от U_0 до U_1, он пропускает один и тот же ток I_0, а при меньшем напряжении ведёт себя как резистор $R_0 = U_0/I_0 = 100$ Ом. Из-за излома вольт-амперной характеристики у цепи два режима, и заранее неизвестно, в каком она окажется. Поэтому метод один: *предположить* режим бареттера, посчитать при этом предположении ток и напряжение и проверить, что они действительно лежат в области этого режима. Не вышло — предположение неверно, берём другой режим. Без проверки легко получить ответ, которого не бывает.

В конце зарядки ток через конденсатор равен нулю: он заряжен и ток не пропускает, весь ток идёт через резистор и бареттер. В начале конденсатор не заряжен, напряжение на нём нуль, и (напряжение на конденсаторе скачком не меняется) ток резистора нуль, весь ток идёт в конденсатор. Если режим в начале и в конце один, то и между ними он не меняется — напряжение на бареттере $U_b = E - U_C$ меняется монотонно и не может выйти из области режима и вернуться. Если разный — режим сменится один раз, и надо найти когда.

Обозначения. U_C — напряжение на конденсаторе (оно же напряжение на резисторе), U_b — напряжение на бареттере, I_b, I_R, I_C — токи бареттера, резистора и конденсатора (рисунок). Конденсатор вначале не заряжен.



Токи и напряжения в цепи.

Запишем законы, которые верны в любой момент. Обход контура «батарейка — бареттер — резистор»: $E = U_b + U_C$. Закон сохранения заряда в узле над резистором: $I_b = I_R + I_C$, причём $I_R = U_C/R$ и $I_C = C\,dU_C/dt$. Так как $U_C \geq 0$, то $U_b \leq E = U_1$: верхняя граница диапазона стабилизации не мешает. Вольт-амперная характеристика бареттера

$$I_b = \begin{cases} U_b/R_0, & U_b < U_0, \\ I_0, & U_0 \leq U_b \leq U_1. \end{cases}$$

Пункт 1. Конечное напряжение.

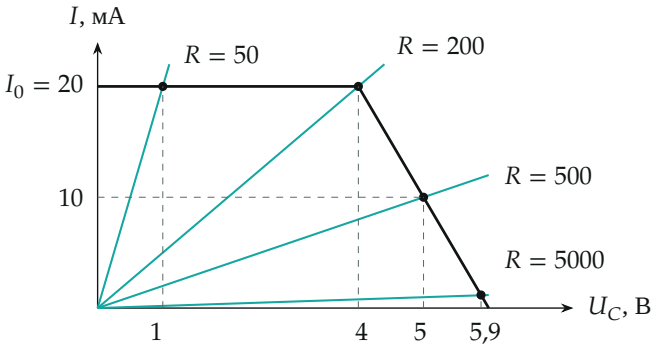
1. Установившийся режим. Конденсатор заряжен, ток через него равен нулю, поэтому $I_b = I_R$. Рассмотрим режим стабилизации: $I_R = I_0$, то есть $U_C = I_0R$, и тогда $U_b = E - I_0R$. Предположение верно, только если $U_0 \leq U_b \leq U_1$, то есть $0 \leq I_0R \leq E - U_0 = 4$ В, что даёт $R \leq 200$ Ом.

2. $R = 50$ **Ом.** Условие выполнено: $U_C = I_0R = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = 1$ В, $U_b = 5$ В лежит в диапазоне $[2; 6]$ В. Конденсатор зарядится до 1 В.

3. $R = 500$ **Ом.** Стабилизации быть не может: $I_0R = 10$ В больше E. Бареттер работает как резистор R_0, а ток через него равен току резистора: $(E - U_C)/R_0 = U_C/R$, откуда

$$U_C = E\,\frac{R}{R + R_0} = 6 \cdot \frac{500}{600} = 5\text{ В}, \qquad U_b = 1\text{ В} < U_0,$$

предположение подтверждено. Конденсатор зарядится до 5 В.



Графическое решение: ток бареттера $I_b(U_C) = I_b(E-U_C)$ (чёрная линия) и ток резистора U_C/R (бирюзовые прямые); их пересечения — установившееся напряжение.

Обратите внимание: режим нужно проверять. Для $R = 50$ Ом омическое предположение дало бы $U_C = 6 \cdot 50/150 = 2$ В, но тогда $U_b = 4$ В $> U_0$ — противоречие. Рисунок это подтверждает: каждая прямая пересекает кривую бареттера ровно в одной точке.

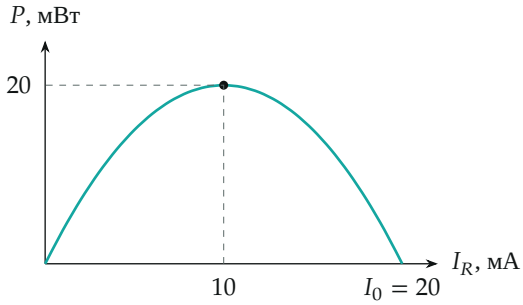
Пункт 2. $R = 200$ **Ом.**

4. Режим бареттера при зарядке. Начало: $U_C = 0$, $I_R = 0$, весь ток течёт через бареттер, и $U_b = E = 6$ В; предположение «омический режим» дало бы $I_b = E/R_0 = 60$ мА $> I_0$, что невозможно, значит, бареттер стабилизирует ток. Конец: стабилизация даёт $U_C = I_0 R = 4$ В и $U_b = 2$ В — ровно граница U_0 (омический режим дал бы $I = E/(R + R_0) = 20$ мА $= I_0$, то есть то же самое). Пока конденсатор заряжается, U_C растёт от 0 до 4 В, а $U_b = E - U_C$ падает от 6 до 2 В, то есть всё время лежит в диапазоне стабилизации. Значит, на протяжении всей зарядки $I_b = I_0 = 20$ мА, а ток резистора $I_R = U_C/R$ монотонно растёт от нуля до 20 мА.

5. Скорость изменения энергии. Энергия конденсатора $W = CU_C^2/2$; ток конденсатора $I_C = I_b - I_R = I_0 - I_R$, напряжение $U_C = RI_R$, поэтому

$$\frac{dW}{dt} = C\,U_C \frac{dU_C}{dt} = U_C\,I_C = R\,I_R\,(I_0 - I_R).$$

Это парабола относительно I_R с нулями при $I_R = 0$ и $I_R = I_0$, её максимум — посередине: $I_R = I_0/2 = 10$ мА. Процесс проходит все значения I_R от 0 до 20 мА, поэтому этот момент достигается.



Скорость изменения энергии конденсатора при $R = 200$ Ом; максимум $RI_0^2/4 = 20$ мВт.

Пункт 3. $R = 5000$ **Ом.**

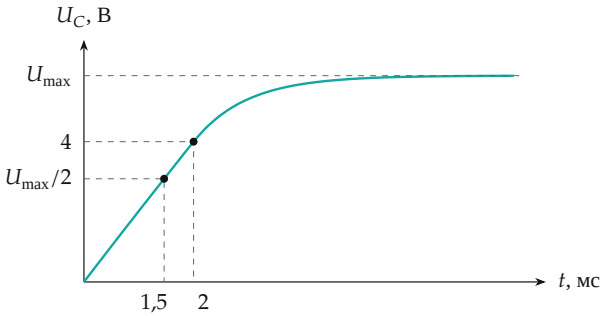
Сначала, как и раньше, проверяем режимы в конце и в начале: в конце омический режим даёт $I = E/(R+R_0) \approx 1{,}2$ мА $< I_0$ (подтверждается), а в начале омический режим дал бы 60 мА $> I_0$ (отвергается). Режим один раз сменится — когда U_b опустится до U_0, то есть при $U_C = E - U_0 = 4$ В; надо выяснить, наберёт ли конденсатор половину заряда до смены или после.

6. Начало зарядки. В начале $U_C = 0$, $U_b = 6$ В, бареттер стабилизирует ток I_0. Ток резистора U_C/R при U_C до 4 В не больше 0,8 мА, то есть не больше 4% от I_0: им можно пренебречь, и $C\,dU_C/dt \approx I_0$. Напряжение растёт линейно, со скоростью $I_0/C = 2$ В/мс, пока $U_b \geq U_0$, то есть до $U_C = E - U_0 = 4$ В (это момент ≈ 2 мс). Дальше бареттер работает как резистор R_0, и конденсатор быстро (за время порядка $R_0C \approx 1$ мс) заряжается до

$$U_{\max} = E\,\frac{R}{R+R_0} = 6 \cdot \frac{5000}{5100} \approx 5{,}9 \text{ В} \approx E.$$

7. Половина заряда. Половине максимального заряда отвечает $U_{\max}/2 \approx 3$ В, а это меньше 4 В: половина набирается ещё до смены режима, на линейном участке. Время находим из $C\,U_C = I_0\,t$ (заряд равен току, умноженному на время):

$$t = \frac{C\,U_{\max}/2}{I_0} \approx \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 3}{20 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 1{,}5 \text{ мс}.$$



Зарядка при $R = 5000$ Ом: до 4 В — участок почти постоянного тока бареттера, затем за время порядка $R_0C \approx 1$ мс — до U_{max}.

Проверка. Размерность: CU/I_0 — (Ф·В)/А — секунды. Учтём ток резистора: $C\,dU_C/dt = I_0 - U_C/R$, откуда $t = RC \ln \dfrac{1}{1 - U_C/(I_0R)}$: $t =$ 1,49 мс при $U_C = 2{,}94$ В и $t = 1{,}52$ мс при $U_C = 3$ В. Поправка около 1%, ответ $\approx$ 1,5 мс не меняется. Предел $R \to \infty$: ток резистора исчезает, бареттер заряжает конденсатор постоянным током, и $t = CU/I_0$ точно. Для $R = 200$ Ом максимум мощности $RI_0^2/4 = 20$ мВт совпадает с произведением $U_CI_C = 2$ В $\cdot$ 10 мА.

Ответ. 1) при $R = 50$ Ом конденсатор зарядится до напряжения 1 В, при $R = 500$ Ом — до 5 В; 2) 10 мА; 3) $\approx$ 1,5 мс.