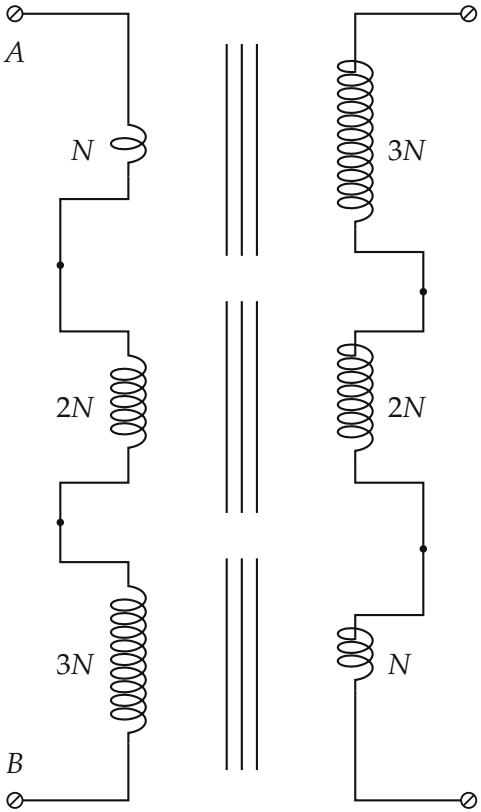
Каскад из трёх трансформаторов

Задача 10. [МОШ 2017/18, 11 класс, задача 10] В лаборатории решили изготовить три трансформатора с одинаковыми сердечниками. На каждый из сердечников намотали по $4N$ витков провода, по-разному распределив их между первичными и вторичными обмотками трансформаторов. Три полученных трансформатора соединили в цепь, схема которой показана на рисунке. На вход цепи (контакты A и B) подали гармоническое напряжение, а к выходу цепи никакой нагрузки не подключили. Каким может быть для этой цепи отношение амплитуды выходного напряжения к амплитуде входного напряжения? Влиянием обмоток соседних трансформаторов друг на друга можно пренебречь.

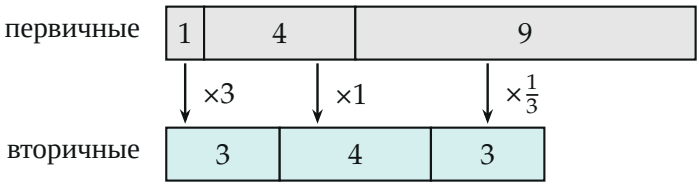


▲ **Решение. Что происходит.** Слева три обмотки соединены последовательно, поэтому через них идёт один и тот же ток. Выход не нагружен, значит, во вторичных обмотках тока нет, магнитный поток в каждом сердечнике создаёт только первичная обмотка этого сердечника, а вторичные лишь «снимают» ЭДС. Главная идея — ЭДС индукции в одном витке $e = d\Phi/dt$ одинакова для всех обмоток одного сердечника, поэтому напряжение любой обмотки равно числу её витков, умноженному на e этого сердечника. Остаётся найти e для каждого сердечника, а потом сложить три вторичных напряжения, учитывая, что фаза каждого заранее неизвестна.

Обозначения. Трансформаторы нумеруем сверху вниз, $k = 1, 2, 3$. Числа витков первичных (левых) обмоток $n_{pk} = N,\ 2N,\ 3N$, вторичных (правых) $n_{sk} = 3N,\ 2N,\ N$; в сумме на каждом сердечнике $4N$. Φ_k — магнитный поток через виток в k-м сердечнике, $e_k = d\Phi_k/dt$ — ЭДС в одном витке. Все величины гармонические, поэтому ниже речь идёт об амплитудах.

1. ЭДС в одном витке. Сердечники одинаковы, поле в сердечнике создаётся током первичной обмотки и пропорционально числу её витков: $\Phi_k = \kappa\, n_{pk}\, I$, где κ — общий для трёх сердечников коэффициент, I — общий ток. Поэтому

$$e_k = \frac{d\Phi_k}{dt} = \kappa\, n_{pk} \frac{dI}{dt} = \lambda\, n_{pk}, \qquad \lambda = \kappa \frac{dI}{dt} \text{ одно для всех } k.$$



Верхняя полоса — напряжения первичных обмоток (в единицах λN^2), нижняя — ЭДС вторичных; стрелки показывают, во сколько раз вторичная обмотка отличается от первичной по числу витков.

2. Первичные обмотки. Напряжение на первичной обмотке равно

числу витков, умноженному на e_k:

$$U_{pk} = n_{pk}\, e_k = \lambda\, n_{pk}^2 \quad \Rightarrow \quad U_{p1} : U_{p2} : U_{p3} = 1 : 4 : 9.$$

Напряжение на входе равно сумме трёх, потому что обмотки соединены последовательно:

$$U_{\text{вх}} = \lambda N^2\,(1 + 4 + 9) = 14\,\lambda N^2.$$

Второй способ: индуктивность обмотки на таком сердечнике пропорциональна квадрату числа витков, $L_k \propto n_{pk}^2$, а напряжение на последовательно включённых катушках делится пропорционально индуктивностям — те же доли $1/14$, $4/14$, $9/14$. Обратите внимание: напряжение делится не по числам витков ($1 : 2 : 3$), а по их квадратам: чем больше витков, тем и больше поток от того же тока.

3. Вторичные обмотки. Через каждый виток вторичной обмотки идёт тот же поток, что и через виток первичной обмотки того же сердечника, поэтому

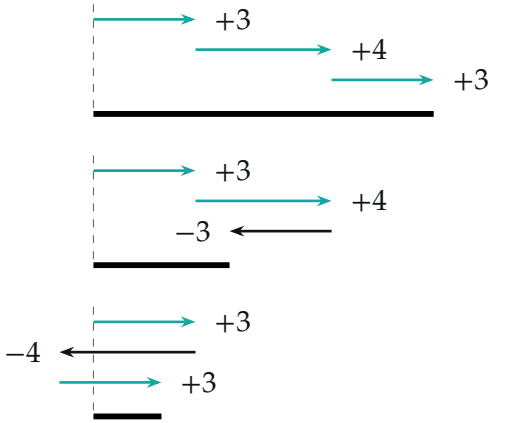
$$U_{sk} = n_{sk}\, e_k = \lambda\, n_{sk} n_{pk} : \qquad U_{s1} = 3\lambda N^2,\ \ U_{s2} = 4\lambda N^2,\ \ U_{s3} = 3\lambda N^2$$

то есть $3/14$, $4/14$ и $3/14$ входного напряжения.

4. Фазы и сумма. Вторичные обмотки включены последовательно, и напряжения складываются алгебраически. Как намотана каждая из них относительно первичной, схема не показывает, поэтому каждое U_{sk} либо совпадает по фазе с входным ($\varepsilon_k = +1$), либо противоположно ему ($\varepsilon_k = -1$), и

$$U_{\text{вых}} = \lambda N^2\,(3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3), \qquad \frac{|U_{\text{вых}}|}{U_{\text{вх}}} = \frac{|3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3|}{14}.$$

Переберём восемь наборов знаков (наборы с противоположными знаками дают ту же амплитуду):



Сложение трёх напряжений 3, 4, 3 (в единицах λN^2) для трёх существенно разных наборов знаков; чёрная полоса — результат.

$$\begin{aligned}
(+,+,+),\ (-,-,-): &\quad \pm 10 \quad \Rightarrow \quad 10/14 = 5/7,\\
(+,+,-),\ (-,-,+): &\quad \pm 4 \quad \Rightarrow \quad 4/14 = 2/7,\\
(+,-,+),\ (-,+,-): &\quad \pm 2 \quad \Rightarrow \quad 2/14 = 1/7,\\
(-,+,+),\ (+,-,-): &\quad \pm 4 \quad \Rightarrow \quad 4/14 = 2/7.
\end{aligned}$$

Здесь в левой части стоят наборы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, а число после двоеточия — сумма $3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$. Получаем три различных значения.

Проверка. Все величины в ответе безразмерны. Проверим формулу на очевидном случае: если бы вторичные обмотки совпадали по числу витков с первичными ($n_{sk} = n_{pk}$) и все $\varepsilon_k = +1$, то выход равнялся бы $\lambda N^2(1 + 4 + 9) = U_{\text{вх}}$, как и должно быть для «трансформатора 1:1». В нашей цепи сумма витков вторичных обмоток $3N + 2N + N = 6N$ равна сумме витков первичных, но большую долю входного напряжения несёт третий трансформатор (она $9/14$), а вторичная обмотка у него самая короткая (N), поэтому даже при согласном включении выходное напряжение меньше входного: $5/7$.

Ответ. Отношение амплитуды выходного напряжения к амплитуде входного напряжения может быть равно $1/7$, $2/7$ или $5/7$ — в зависимости от того, как намотаны вторичные обмотки.