Гонка Молнии Маккуина и Чико

Задача 2. [МОШ 2017/18, 7 класс, задача 2] Тачки Молния Маккуин и Чико в очередной раз соревнуются на дистанции. В итоге, после напряжённой борьбы, Молния Маккуин оказался на финише через 50 минут после старта, опередив Чико. На рисунке представлен график, на котором показана разность расстояний ΔS, которые преодолели тачки к моменту времени t.

1) Сколько раз за гоночный заезд обгонял Чико своего соперника?
2) На сколько различаются средние скорости движения тачек за 50 мин?
3) С какой скоростью ехал Молния Маккуин в течение первых 10 минут, если Чико в это же время ехал со скоростью 160 км/ч?

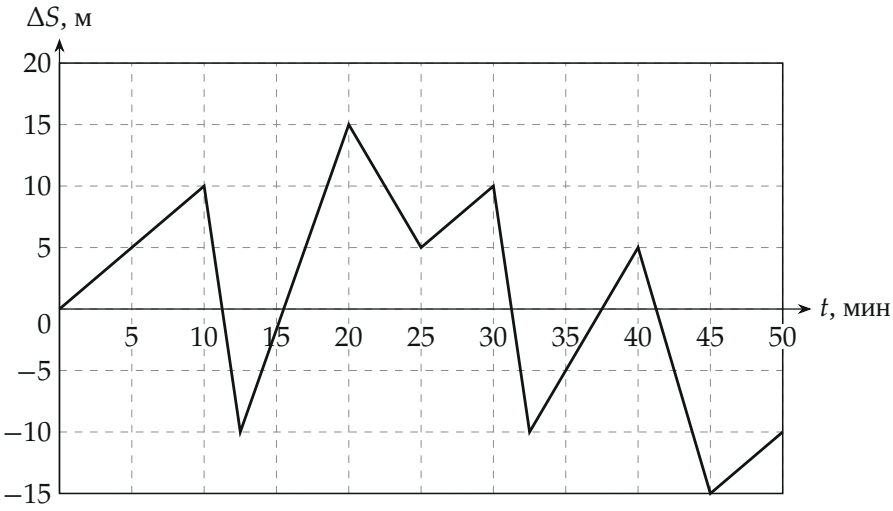


Рис. 1. График $\Delta S(t)$ из условия

▲ **Решение.** **Что происходит.** На графике — не путь одной машины, а их разность. Знак разности показывает, кто впереди, а нуль разности — момент, когда машины поравнялись. Наклон графика — разность скоростей в этот момент: производная ΔS по времени равна $v_{\text{Ч}} - v_{\text{М}}$. Три вопроса читаются прямо с графика.

Обозначения. $S_{\text{Ч}}(t)$ и $S_{\text{М}}(t)$ — расстояния, пройденные Чико и Маккуином от старта; по рисунку $\Delta S(t) = S_{\text{Ч}}(t) - S_{\text{М}}(t)$. Проверим знак по финишу: Маккуин пришёл первым, значит к $t = 50$ мин он проехал больше и $\Delta S(50) = -10\text{ м} < 0$ — график это и показывает. Итак, $\Delta S > 0$ — впереди Чико, $\Delta S < 0$ — впереди Маккуин.

Пункт 1. Обгон Чико — момент, когда он, ехавший сзади ($\Delta S < 0$), оказывается впереди ($\Delta S > 0$): график пересекает ось времени *снизу вверх*. Старт ($t = 0, \Delta S = 0$) обгоном не считаем: до старта тачки стояли рядом. Нули графика находим по прямолинейным участкам (линейная интерполяция между вершинами):

участок	нуль, мин	кто кого обгоняет
$10 \to 12{,}5$ $(10 \to -10)$	11,25	Маккуин
$12{,}5 \to 20$ $(-10 \to 15)$	15,5	Чико
$30 \to 32{,}5$ $(10 \to -10)$	31,25	Маккуин
$32{,}5 \to 40$ $(-10 \to 5)$	37,5	Чико
$40 \to 45$ $(5 \to -15)$	41,25	Маккуин

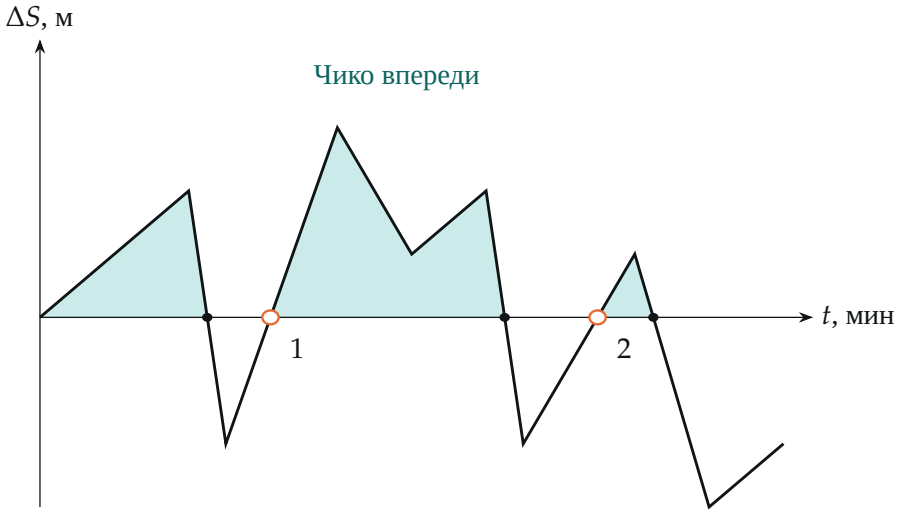


Рис. 2. Бирюзовым закрашено, где Чико впереди ($\Delta S > 0$); светлые кружки 1 и 2 — обгоны Чико (график идёт снизу вверх), чёрные точки — обгоны Маккуина

Снизу вверх ось пересекается дважды: при $t \approx 15{,}5$ мин и $t \approx 37{,}5$ мин. Остальные три пересечения — сверху вниз, это обгоны Маккуина.

Пункт 2. Средняя скорость — весь путь на всё время, $\bar{v} = S/t$. Для двух машин за $t = 50$ мин

$$\bar{v}_\text{Ч} - \bar{v}_\text{М} = \frac{S_\text{Ч}(50) - S_\text{М}(50)}{50\text{ мин}} = \frac{\Delta S(50)}{50\text{ мин}} = \frac{-10\text{ м}}{50\text{ мин}} = -0{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

Маккуин ехал в среднем быстрее на 0,2 м/мин. Промежуточные скачки графика не нужны: в разность средних скоростей входят только расстояния в начале и в конце.

Наклон каждого участка графика — разность скоростей Чико и Маккуина на нём (в м/мин; на последнем участке 45–50 мин она равна +1):

t, мин	0–10	10–12,5	12,5–20	20–25
$v_\text{Ч} - v_\text{М}$	+1	−8	+3,3	−2

t, мин	25–30	30–32,5	32,5–40	40–45
$v_\text{Ч} - v_\text{М}$	+1	−8	+2	−4

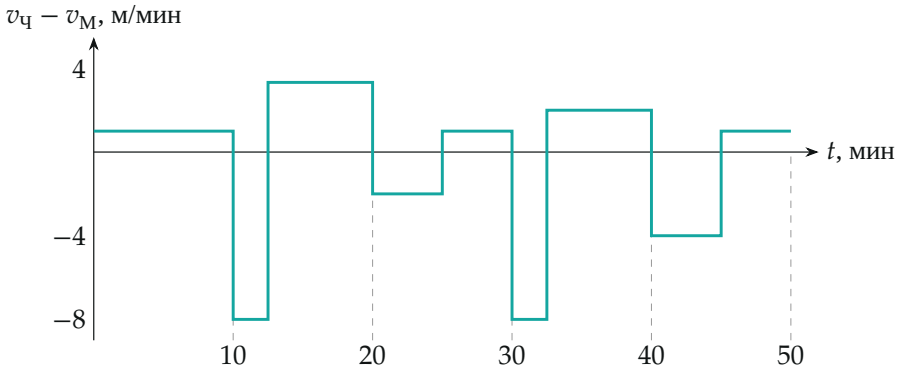


Рис. 3. Разность скоростей Чико и Маккуина; площадь под графиком от 0 до t равна $\Delta S(t)$, а полная площадь за 50 мин даёт −10 м

Пункт 3. На участке 0–10 мин график — прямая от 0 до 10 м, наклон

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = v_\text{Ч} - v_\text{М} = \frac{10\text{ м}}{10\text{ мин}} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{мин}} = 60\,\frac{\text{м}}{\text{ч}} = 0{,}06\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Чико быстрее, поэтому Маккуин едет медленнее на это значение:

$$v_{\text{М}} = 160 - 0{,}06 = 159{,}94 \text{ км/ч}.$$

Проверка. Расстояния за 10 мин ($= 1/6$ ч): Чико $160 \cdot \frac{1}{6} \approx 26{,}667$ км, Маккуин на 10 м $= 0{,}01$ км меньше, то есть 26,657 км; $26{,}657 \cdot 6 = 159{,}94$ км/ч, как и выше. Знак: Чико впереди ($\Delta S > 0$), значит он и быстрее.

Смысл: график разности — «карта» гонки, где важно не значение, а знак, нули и наклон.

Ответ. 1) Чико обгонял соперника 2 раза; 2) средние скорости различаются на 0,2 м/мин (Маккуин быстрее); 3) Маккуин ехал со скоростью 159,94 км/ч.