Таракан на ленте транспортера

Задача 3. [МОШ 2017/18, 7 класс, задача 3] Горизонтальная лента транспортера движется со скоростью $u = 1$ см/с относительно земли. Таракан может бегать по ленте со скоростью V относительно ленты по нарисованному на ленте квадрату с длиной стороны $a = 5$ см в направлении по часовой стрелке, если смотреть на ленту сверху. В начальный момент времени таракан находится в углу квадрата, в точке с координатой 0 по оси OX, неподвижной относительно земли.

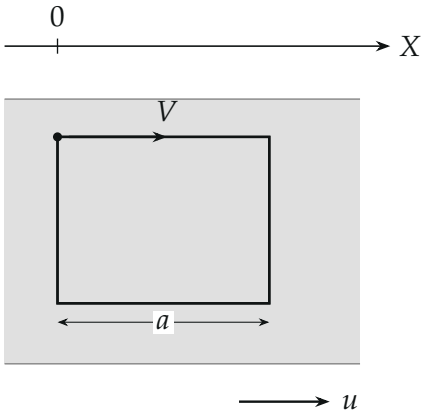


Рис. 1. Лента с квадратом (вид сверху): таракан стартует из левого верхнего угла и бежит по часовой стрелке, то есть первой идёт верхняя сторона вправо

1) Если $V = u$, то чему будет равна средняя скорость перемещения таракана относительно оси OX к моментам времени $t_1 = 3a/(2V)$, $t_2 = 5a/(2V)$ и $t_3 = 7a/(2V)$?
2) Для $V = 2{,}5u$ нарисуйте траекторию таракана в системе отсчёта, неподвижной относительно земли, для первых 20 с движения.
3) При какой скорости таракана траектория представляет собой ломаную линию, не пересекающую саму себя?

▲ **Решение. Что происходит.** Таракан участвует в двух движениях: бежит по ленте и вместе с лентой едет вдоль OX. Скорость относительно

земли — векторная сумма $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ (скорость относительно ленты плюс скорость ленты), а смещение за время τ — $\vec{v}\,\tau$. Квадрат он обходит сторону за стороной, на каждой из них скорость $\vec{V}$ направлена по-своему, и составляющая вдоль OX у каждой стороны своя.

Обозначения. Ось x — вдоль OX (по движению ленты), ось y — вертикально вниз на рисунках от верхней стороны квадрата, $\tau = a/V$ — время, за которое таракан пробегает одну сторону. Сторона 1 — верхняя (вправо), 2 — правая (вниз), 3 — нижняя (влево), 4 — левая (вверх). Проекции скорости относительно земли:

сторона	v_x	v_y
1	$V + u$	0
2	u	$-V$
3	$u - V$	0
4	u	$+V$

Смещение вдоль OX на каждой стороне за время τ равно $v_x\tau$.

Пункт 1. $V = u$**.** Тогда $\tau = a/V = 5$ см/(1 см/с) $= 5$ с, а проекции v_x на сторонах 1–4 равны $2u,\ u,\ 0,\ u$, то есть 2, 1, 0, 1 см/с. Средняя скорость вдоль OX — смещение вдоль OX за всё время, делённое на время: $w = x(t)/t$.

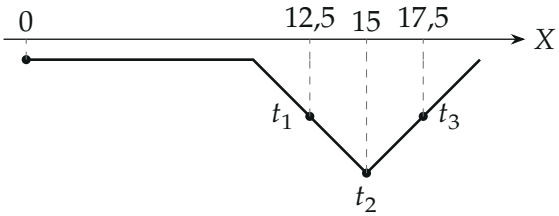


Рис. 2. Траектория при $V = u$ (1 см рисунка = 3,3 см): точки t_1, t_2, t_3 и их проекции на OX; сторона 3 вырождена в точку — таракан стоит относительно земли

При $V = u$ имеем $t_1 = 7{,}5$ с (сторона 1 пройдена, на стороне 2 ещё 2,5 с), $t_2 = 12{,}5$ с (на стороне 3 уже 2,5 с), $t_3 = 17{,}5$ с (на стороне 4 уже 2,5 с). Смещение вдоль OX — сумма $v_x\Delta t$ по пройденным кускам,

средняя скорость — его отношение ко времени:

$$x(t_1) = 2\cdot 5 + 1\cdot 2{,}5 = 12{,}5 \text{ см}, \qquad w(t_1) = \frac{12{,}5 \text{ см}}{7{,}5 \text{ с}} = \frac{5}{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$x(t_2) = 10 + 5 + 0\cdot 2{,}5 = 15 \text{ см}, \qquad w(t_2) = \frac{15 \text{ см}}{12{,}5 \text{ с}} = \frac{6}{5}\,\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$x(t_3) = 10 + 5 + 0 + 1\cdot 2{,}5 = 17{,}5 \text{ см}, \quad w(t_3) = \frac{17{,}5 \text{ см}}{17{,}5 \text{ с}} = 1\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Пункт 2. $V = 2{,}5u = 2{,}5$ **см/с.** Время стороны $\tau = a/V = 2$ с, один обход — 8 с, за 20 с таракан пройдёт 2,5 обхода. Смещения за сторону $\Delta x = v_x\tau$, $\Delta y = v_y\tau$ (см, $u = 1$ см/с): сторона 1 — $(7;\,0)$, сторона 2 — $(2;\,-5)$, сторона 3 — $(-3;\,0)$, сторона 4 — $(2;\,+5)$. За один обход таракан смещается на $7+2-3+2 = 8$ см вдоль OX, и вершины траектории — в точках $(0;0)$, $(7;0)$, $(9;-5)$, $(6;-5)$, $(8;0)$, затем то же со сдвигом на 8 см: $(15;0)$, $(17;-5)$, $(14;-5)$, $(16;0)$ и, наконец, за последние 4 с — $(23;0)$ и $(25;-5)$.

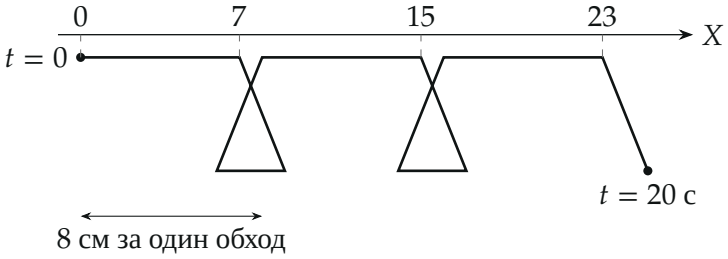


Рис. 3. Траектория таракана при $V = 2{,}5u$ за первые 20 с в системе отсчёта земли (масштаб: 1 см рисунка = 3,3 см; по вертикали тот же)

Диагональные стороны 2 и 4 в каждом обходе пересекаются — «крестики» на рис. 3 — потому что нижняя сторона 3 идёт против OX.

Пункт 3. Составим положения вершин одного обхода (в единицах a; $\tau = a/V$): после стороны 1 $x_1 = (V+u)\tau$, после стороны 2 $x_2 = x_1 + u\tau$, после стороны 3 $x_3 = x_2 - (V-u)\tau = 3u\tau$, после стороны 4 $x_4 = x_3 + u\tau = 4u\tau$. Стороны 2 и 4 — диагонали: сторона 2 идёт сверху (x_1) вниз (x_2), сторона 4 — снизу (x_3) вверх (x_4). Внизу сторона 2 правее

стороны 4 ($x_2 > x_3$), если

$$x_2 - x_3 = (V - u)\tau > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V > u.$$

Тогда, пока вверху сторона 4 левее стороны 2 ($x_4 > x_1$, то есть $V < 3u$), диагонали пересекаются; если же $V > 3u$, сторона 4 приходит на верхнюю линию левее конца стороны 1 и следующий обход проходит по уже пройденной линии — снова самопересечение (наложение). При $V < u$ все $v_x > 0$ (даже на нижней стороне $u - V > 0$): таракан сдвигается вправо на каждой стороне, ломаная идёт вправо и не может вернуться. При $V = u$ нижняя сторона вырождается в точку, линии только касаются в вершине. Условие, при котором самопересечений нет:

$$V < u.$$

Проверка. Размерность: средняя скорость в см/с. Предельный случай: $w(t) \to u$ при больших t (при $V = u$ за обход 20 см за 20 с: $x(t_3)/t_3 = 1$ см/с — именно скорость ленты, поскольку суммарное смещение таракана по ленте за обход равно нулю). Для $V = 2{,}5u$ тоже: 8 см за 8 с, то есть u.

Смысл: через целое число обходов относительно ленты таракан возвращается на место, поэтому его средняя скорость вдоль OX равна скорости ленты.

Ответ. 1) $w(t_1) = \dfrac{5}{3}$ см/с, $w(t_2) = \dfrac{6}{5}$ см/с, $w(t_3) = 1$ см/с; 2) траектория — рис. 3; 3) $V < u$.