Фильтр с гранулами

Задача 4. [МОШ 2017/18, 7 класс, задача 4] Цилиндрический фильтр с поперечным сечением $S = 100$ см^2 и объёмом $V_0 = 2$ литра заполнен водой и однородно распределёнными гранулами объёмом $\Omega = 0{,}8$ см^3 каждая. Когда снизу открыли кран и через него вытек объём воды $V = 0{,}13$ литра, то уровень воды в фильтре понизился на $h = 5$ см. Сколько гранул находится в фильтре? Расположение гранул при вытекании воды из фильтра остаётся неизменным.

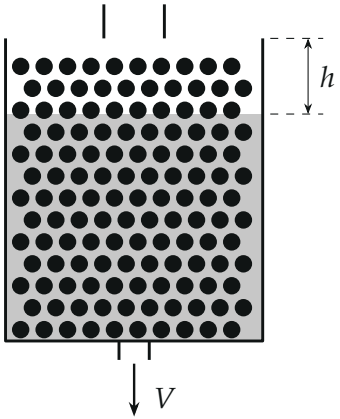


Рис. 1. Фильтр: серым показана вода между гранулами; после вытекания объёма V верхний слой толщиной h остался без воды

▲ **Решение. Что происходит.** Фильтр — цилиндр, внутри которого гранулы плотно уложены в воде. Из крана вытекает вода, но гранулы стоят на месте, поэтому вытечь могла только вода из зазоров между гранулами. Верхний слой толщиной h остался без воды: вся вода из его зазоров вытекла, и её объём равен V. Гранулы распределены однородно, поэтому число гранул пропорционально высоте слоя. Ход: найти число гранул в слое h, затем умножить на отношение высот.

Обозначения. H — высота фильтра, N_h — число гранул в верхнем слое толщиной h, N_0 — число гранул во всём фильтре. Единицы: 1 л = 1000 см^3, поэтому $V_0 = 2000$ см^3, $V = 130$ см^3.

1. Объём слоя и зазоров. Объём слоя толщиной h — это площадь сечения на толщину: $Sh = 100 \cdot 5 = 500$ см^3. Он состоит из гранул и зазоров между ними; зазоры заполнялись водой, и вся она вытекла (закон сохранения объёма воды: что вытекло, то и занимало зазоры слоя):

$$Sh = N_h\Omega + V.$$

2. Число гранул в слое.

$$N_h = \frac{Sh - V}{\Omega} = \frac{500 - 130}{0{,}8} = 462{,}5.$$

Это не целое число: в реальном слое их либо 462, либо 463, а «462,5» — среднее значение при однородном распределении.

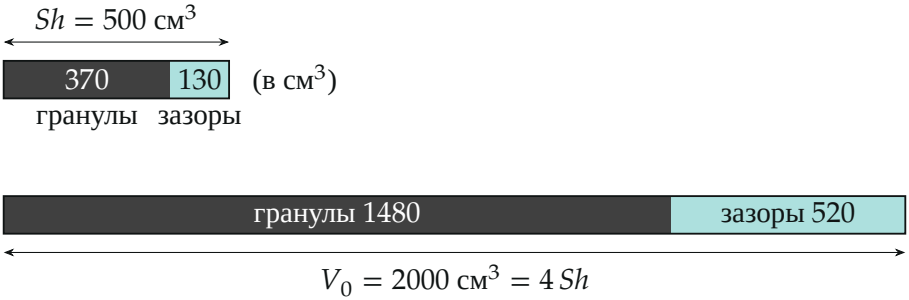


Рис. 2. Состав объёма: слой h — одна четверть фильтра, и доля гранул в нём такая же, как во всём фильтре ($370/500 = 0{,}74$)

3. Высота фильтра и однородность. Фильтр — цилиндр с тем же сечением S, его высота $H = V_0/S = 2000/100 = 20$ см, то есть слой h составляет $h/H = 1/4$ фильтра. Гранулы распределены однородно, значит в слое такой же высоты столько же гранул, и во всём фильтре их в $H/h = 4$ раза больше:

$$N_0 = N_h\frac{H}{h} = \frac{Sh - V}{\Omega} \cdot \frac{V_0}{Sh} = \frac{V_0\,(Sh - V)}{Sh\,\Omega} = \frac{2000 \cdot 370}{500 \cdot 0{,}8} = 1850.$$

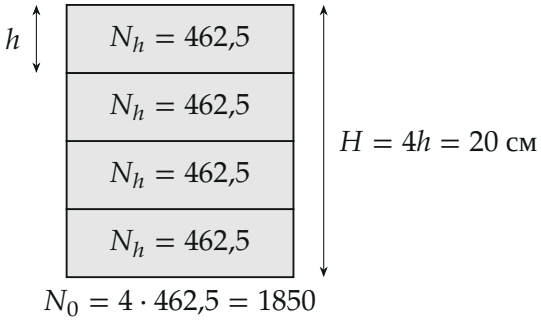


Рис. 3. Однородность: фильтр — четыре одинаковых слоя по $h = 5$ см, гранул в каждом столько же

Проверка. Второй способ: доля объёма, занятая гранулами, одинакова по высоте и равна $\varphi = (Sh - V)/(Sh) = 370/500 = 0{,}74$. Значит, все гранулы занимают $\varphi V_0 = 0{,}74 \cdot 2000 = 1480$ см^3, и $N_0 = 1480/0{,}8 = 1850$ — ответ тот же. Размерность: $\dfrac{\text{см}^3 \cdot \text{см}^3}{\text{см}^3 \cdot \text{см}^3}$ — безразмерное число, как и должно быть. Значение $\varphi = 0{,}74$ физично: у плотной укладки шаров доля занятого объёма около 0,74.

Смысл: однородность позволяет по маленькому слою судить о всём фильтре — достаточно знать, какая доля объёма в нём приходится на гранулы.

Ответ. В фильтре $N_0 = \dfrac{V_0(Sh - V)}{Sh\,\Omega} = 1850$ гранул.