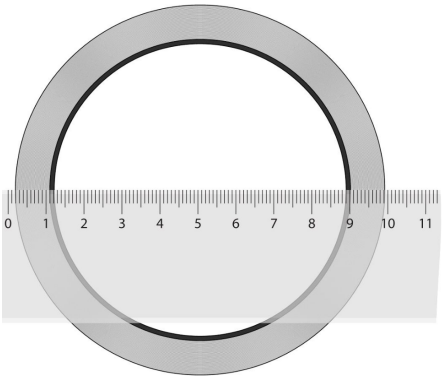
Катушка скотча

Задача 5. [МОШ 2017/18, 7 класс, задача 5] Активный пенсионер Николай Васильевич купил в магазине катушку клейкой ленты (скотча) без заводской этикетки. Его заинтересовали вопросы: какова длина L этой ленты, и чему равна толщина d плёнки, из которой лента изготовлена? Николай Васильевич сфотографировал катушку клейкой ленты вместе с линейкой, приложенной в самом широком месте катушки. После этого он показал фотографию своим друзьям (аккуратно сделанный по фотографии рисунок приведён ниже), задал им свои вопросы, и через некоторое время получил ответы — они приведены в таблице. При этом один из друзей честно признался, что длину скотча он узнал у продавца в магазине, а затем вычислил толщину при помощи фотографии. Кто из друзей Николая Васильевича правильно ответил на вопросы? Чему равны длина ленты и толщина плёнки?

	Александр Иванович	Фёдор Петрович	Иван Васильевич	Лев Сергеевич	Михаил Владимирович
L, м	25	15	5	40	50
d, мкм	30	10	80	15	50



Примечание: мкм — это микрон, то есть одна миллионная часть метра.

▲ **Решение. Что происходит.** На фотографии катушка смотрит на нас торцом. Лента намотана плотно, виток к витку, поэтому её видно как кольцо: внутри — картонная втулка, снаружи — последний виток. Если смотать ленту обратно, получится длинная тонкая полоска: длина L, толщина d и та же ширина b (вдоль оси катушки). Материала в ленте столько же, сколько в кольце: объём один. Приравняем два способа подсчёта объёма — и ширина сократится, а останется площадь кольца.

Обозначения. b — ширина ленты, D_1 — внешний диаметр намотанной ленты, D_2 — внутренний (диаметр втулки), S — площадь кольца на фотографии, V — объём ленты.

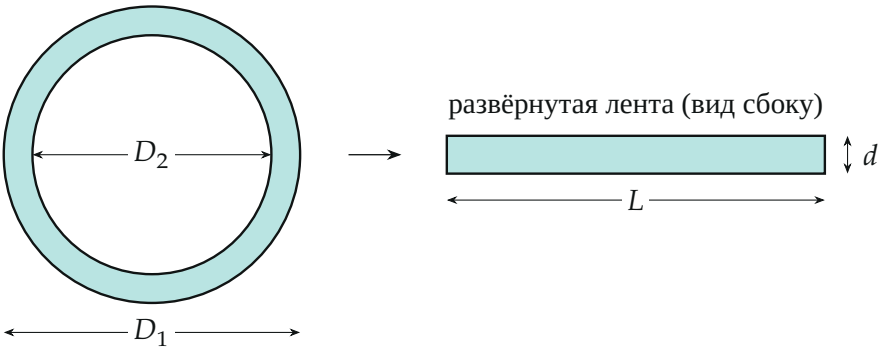


Рис. 1. Один и тот же слой ленты: свёрнутый — кольцо площадью $S = \frac{\pi}{4}(D_1^2 - D_2^2)$, развёрнутый — полоска $L \times d$ площадью Ld (в торце); ширина b перпендикулярна плоскости рисунка

1. Объём двумя способами. Объём развёрнутой ленты — длина на толщину на ширину; объём намотанной — площадь кольца на ту же ширину (витки плотно прижаты друг к другу, воздух между ними не учитываем):

$$V = L\,d\,b = S\,b.$$

2. Сокращаем ширину.

$$L\,d = S, \qquad S = \frac{\pi}{4}\left(D_1^2 - D_2^2\right).$$

То есть по фотографии можно найти только произведение Ld, а не каждый множитель в отдельности — поэтому в условии и дана таблица пар.

3. Диаметры по линейке. Линейка приложена в самом широком месте катушки, значит, она лежит вдоль диаметра. Читаем на фотографии: внешний край ленты — от 0,1 до 9,9 см, то есть $D_1 \approx 9{,}8$ см; внутренний край (кромка втулки) — от 1,1 до 9,0 см, то есть $D_2 \approx 7{,}9$ см. Отсюда

$$S = \frac{\pi}{4}\left(9{,}8^2 - 7{,}9^2\right)\ \text{см}^2 = \frac{\pi}{4}\cdot 33{,}6\ \text{см}^2 \approx 26\ \text{см}^2 = 2{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{м}^2.$$

4. Что подходит из таблицы. Для каждого друга находим Ld и сравниваем с S (перевод: 1 мкм $= 10^{-6}$ м):

	Алекс.	Фёдор	Иван	Лев	Михаил
Ld, 10^{-4} м^2	7,5	1,5	4	6	25

Только у Михаила $Ld = 25\cdot 10^{-4}$ м^2 $= 25$ см^2 совпадает с $S \approx 26$ см^2 (разница $\approx 4\,\%$, это точность отсчёта по линейке); у остальных произведение меньше S в 3–17 раз.

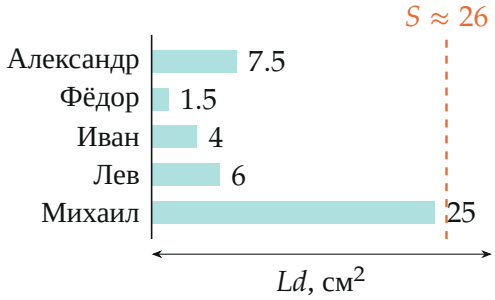


Рис. 2. Произведения Ld из ответов друзей и площадь кольца по фотографии: совпадает только ответ Михаила Владимировича

5. Длина и толщина. У Михаила $L = 50$ м, $d = 50$ мкм. По фотографии толщина получается чуть иной, $d = S/L \approx 2{,}6\cdot 10^{-3}/50 \approx 5{,}2\cdot 10^{-5}$ м $= 52$ мкм, то есть в пределах точности отсчёта это те же 50 мкм.

Проверка. Второй способ: число витков $N = \dfrac{D_1 - D_2}{2d} = \dfrac{0{,}95\ \text{см}}{0{,}005\ \text{см}} = 190$ (каждый виток добавляет d к радиусу), средняя длина витка $\pi\dfrac{D_1 + D_2}{2} \approx \pi\cdot 8{,}85$ см $= 27{,}8$ см, длина ленты $L = N\cdot 27{,}8$ см $\approx$

$5{,}3 \cdot 10^3$ см $=$ 53 м — те же 50 м. Размерность: $[Ld] = \text{м} \cdot \text{м} = \text{м}^2$ — площадь, как и S.

Смысл: невозможно измерить толщину плёнки в 50 мкм линейкой, но можно измерить площадь кольца из десятков тысяч таких толщин и разделить на известную длину.

Ответ. Правильно ответил Михаил Владимирович: $L = 50$ м, $d = 50$ мкм.