Красные и белые кубики

Задача 7. [МОШ 2017/18, 7 класс, задача 7] Две одинаковые коробки плотно заполнили доверху красными и белыми кубиками одинакового размера. В первой коробке красных кубиков на 26 больше, чем белых, и средняя плотность содержимого коробки оказалась равна 6,6 г/см^3. Средняя плотность содержимого второй коробки равна 7,5 г/см^3. Объём коробки равен 1 л, масса красного кубика 52 г, белого — 127 г. Кубиков какого цвета во второй коробке больше, и на сколько штук?

▲ **Решение. Что происходит.** Коробки одинаковые и заполнены доверху кубиками одного размера, значит, в обеих коробках одно и то же число кубиков N и один и тот же объём $V = 1000$ см^3. Различается только соотношение цветов, а оно сдвигает среднюю плотность. Идея: считать не кубики по цветам, а *разность* $d = r - w$ (красных минус белых) и узнать, как она связана с массой коробки.

Обозначения. r и w — числа красных и белых кубиков в коробке, $N = r + w$ — общее число, $d = r - w$, $m_r = 52$ г, $m_w = 127$ г — массы кубиков, ρ — средняя плотность. Для первой коробки $d_1 = 26$, $\rho_1 = 6{,}6$ г/см^3; для второй $\rho_2 = 7{,}5$ г/см^3, надо найти d_2.

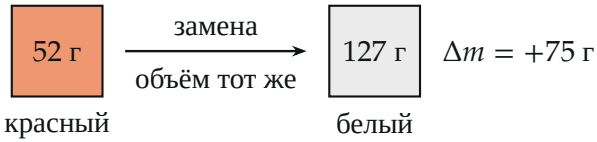


Рис. 1. Замена красного кубика белым: объём коробки не меняется, масса растёт на 75 г

1. Что даёт одна замена. Заменим в коробке один красный кубик белым: объём остаётся V, масса увеличивается на $m_w - m_r = 127 - 52 = 75$ г. Плотность $\rho = m/V$ растёт на

$$\Delta\rho = \frac{75\text{ г}}{1000\text{ см}^3} = 0{,}075\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

2. Сколько замен отделяют вторую коробку от первой. Плотности различаются на $\rho_2 - \rho_1 = 7{,}5 - 6{,}6 = 0{,}9$ г/см^3. Тогда число замен

$$k = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta\rho} = \frac{0{,}9}{0{,}075} = 12.$$

Значит, вторую коробку можно получить из первой, заменив $k = 12$ красных кубиков белыми.

3. Как меняется разность. При каждой замене красных становится на один меньше ($r \to r - 1$), а белых на один больше ($w \to w + 1$), поэтому $d = r - w$ уменьшается на 2:

$$d_2 = d_1 - 2k = 26 - 24 = 2.$$

Красных во второй коробке больше белых на 2.

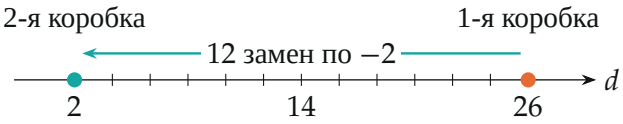


Рис. 2. Разность $d = r - w$: двенадцать замен по -2 ведут от первой коробки ($d = 26$) ко второй ($d = 2$)

Второй способ (по массам). Выразим массу коробки через N и d: $r = \frac{N + d}{2}$, $w = \frac{N - d}{2}$, значит

$$m = m_r r + m_w w = \frac{(m_r + m_w)N - (m_w - m_r)\,d}{2} = \frac{179\,N - 75\,d}{2}.$$

Для двух коробок $m_1 = 6600$ г и $m_2 = 7500$ г, N одно и то же; вычитаем:

$$m_2 - m_1 = \frac{75\,(d_1 - d_2)}{2} \;\Rightarrow\; 900 = \frac{75\,(26 - d_2)}{2} \;\Rightarrow\; d_2 = 26 - 24 = 2.$$

Число N при этом искать не нужно. Данные условия округлены ($N \approx 84{,}6$ получается нецелым), но на разности d_2 это не сказывается.

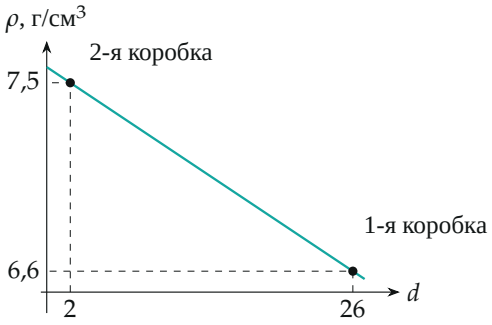


Рис. 3. Плотность содержимого коробки линейно убывает с ростом $d = r - w$ (чем больше красных, тем легче): две известные точки определяют прямую

Проверка. Размерность: $\Delta\rho$ в г/см^3, k — число штук. Знак: плотность второй коробки больше, значит белых (тяжёлых) в ней больше, чем в первой, и d уменьшилось — с 26 до 2. Предел: чтобы красных и белых стало поровну ($d = 0$), надо ещё одну замену — получилась бы плотность 7,575 г/см^3; наша 7,5 чуть ниже, потому и красных ещё на 2 больше.

Смысл: масса коробки линейно зависит от разности d; сдвиг в 0,9 г/см^3 — это ровно двенадцать замен.

Ответ. Во второй коробке красных кубиков на 2 больше, чем белых.