Лодка и катер между пристанями

Задача 8. [МОШ 2017/18, 7 класс, задача 8] Пристань B расположена ниже пристани A по течению реки. Между A и B курсируют лодка и катер. Лодка стартует из A одновременно с катером, стартующим из B. Когда лодка подходит к пристани B, она разворачивается, затрачивая на разворот пренебрежимо малое время, и идёт обратно, затем доходит до пристани A, разворачивается, и так далее. Катер движется аналогичным образом.

Первая встреча катера и лодки произошла через 1 час после начала движения. Когда катер после первой встречи подошёл к пристани A, лодка прошла $3/5$ расстояния между A и B. Вторая встреча катера и лодки произошла у пристани B, куда они прибыли одновременно.

1) Через какое время после начала движения катер подошёл к пристани A?
2) Определите, через какое время после первой встречи произошла вторая встреча?
3) Через какое время после второй встречи произойдёт третья встреча?

▲ **Решение. Что происходит.** Река сносит и лодку, и катер, но на сближение двух судов течение не влияет: если они идут навстречу друг другу, один идёт по течению, другой против, и поправки $+u$ и $-u$ сокращаются. Поэтому первая встреча даёт сумму собственных скоростей. Всё остальное — два уравнения про один и тот же отрезок AB: сколько пройдёт лодка, пока катер добирается до A, и что происходит у B.

Обозначения. L — расстояние AB, u — скорость течения, V_1 — скорость лодки в стоячей воде, V_2 — скорость катера в стоячей воде (скорости относительно воды). Относительно берега: лодка по течению (от A к B) $V_1 + u$, против течения $V_1 - u$; катер по течению $V_2 + u$, против течения $V_2 - u$. В начале лодка идёт по течению, катер — против.

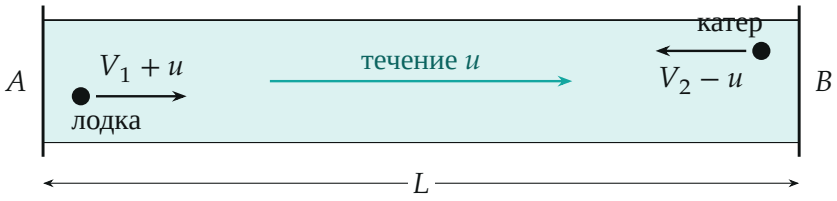


Рис. 1. Старт: лодка идёт из A по течению, катер — из B против течения (скорости относительно берега)

1. Первая встреча. Суда идут навстречу друг другу и сближаются со скоростью

$$(V_1 + u) + (V_2 - u) = V_1 + V_2.$$

Встреча через $t_1 = 1$ ч $= 60$ мин после старта, значит $L = (V_1 + V_2)\, t_1$.

2. Катер подходит к A. Катер идёт против течения со скоростью $V_2 - u$ и проходит L за $T_A = \dfrac{L}{V_2 - u}$. Лодка за это время идёт по течению ещё (B она не достигла) и проходит $(V_1 + u)\, T_A = \dfrac{3}{5}L$:

$$\frac{V_1 + u}{V_2 - u} = \frac{3}{5}. \qquad (1)$$

3. Вторая встреча у B. Лодка идёт от A к B по течению и приходит в B в момент $L/(V_1+u)$. Катер подходит к A в момент T_A, разворачивается и идёт к B по течению: приходит в B в момент $T_A + \dfrac{L}{V_2 + u}$. Они приходят одновременно:

$$\frac{L}{V_1 + u} = \frac{L}{V_2 - u} + \frac{L}{V_2 + u}. \qquad (2)$$

4. Скорости. Измеряем скорости в единицах u: $x = V_1/u$, $y = V_2/u$. Из (1): $5(x + 1) = 3(y - 1)$, то есть $x + 1 = \dfrac{3(y - 1)}{5}$. Уравнение (2) принимает вид $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2y}{y^2 - 1}$, то есть $y^2 - 1 = 2y\,(x+1)$. Подставляем $x + 1$:

$$(y-1)(y+1) = \frac{6y\,(y-1)}{5} \;\Rightarrow\; y+1 = \frac{6y}{5} \;\Rightarrow\; y = 5, \qquad x = \frac{3\cdot 4}{5} - 1 = \frac{7}{5}.$$

Итак, $V_2 = 5u$ (катер в 5 раз быстрее течения), $V_1 = \dfrac{7}{5}u$. Из пункта 1: $L = (V_1 + V_2)\, t_1 = \dfrac{32}{5}u \cdot 60$ мин $= 384\, u \cdot$ мин.

Пункт 1. $T_A = \dfrac{L}{V_2 - u} = \dfrac{384}{4} = 96$ мин.

Пункт 2. Лодка приходит в B в момент $\dfrac{L}{V_1 + u} = \dfrac{384}{12/5} = 160$ мин после старта. Это и есть вторая встреча (катер приходит к тому же моменту: $96 + \dfrac{384}{6} = 96 + 64 = 160$ мин). После первой встречи (60 мин):

$$160 - 60 = 100 \text{ мин.}$$

В ответе организаторов стоит 64 мин — это время от разворота катера у A до второй встречи, а не от первой встречи.

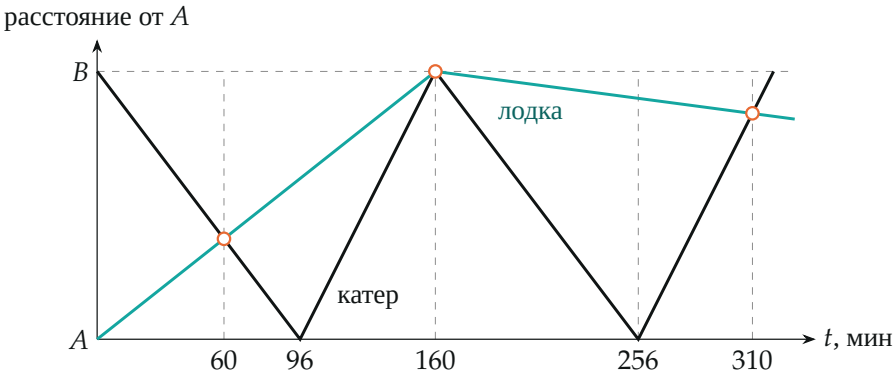


Рис. 2. Графики координат (от A): лодка — бирюзовая линия, катер — чёрная ломаная; светлые кружки — три встречи, в t = 60, 160 и 310 мин

Пункт 3. В момент второй встречи оба судна у B и разворачиваются против течения. Катер идёт со скоростью $V_2 - u = 4u$ и подходит к A через $\dfrac{384}{4} = 96$ мин (к моменту 256 мин). Лодка идёт со скоростью $V_1 - u = \dfrac{2}{5}u$, за 96 мин проходит $0{,}4u \cdot 96$ мин $= 38{,}4\,u \cdot$ мин $= 0{,}1L$ от B; значит, она на расстоянии $L - 38{,}4\,u \cdot$ мин $= 345{,}6\,u \cdot$ мин от A. Катер разворачивается у A и идёт по течению со скоростью $V_2 + u = 6u$ навстречу лодке (она идёт против течения со скоростью $\dfrac{2}{5}u$). Сближаются

со скоростью $6u + \frac{2}{5}u = 6{,}4u$:

$$t = \frac{345{,}6}{6{,}4} = 54 \text{ мин},$$

то есть третья встреча в момент $256 + 54 = 310$ мин, спустя $310 - 160 = 150$ мин после второй.

Проверка. Положение третьей встречи: катер за 54 мин по течению проходит $6 \cdot 54 = 324$ единицы от A, лодка за 150 мин против течения проходит от B расстояние $\frac{2}{5} \cdot 150 = 60$: $384 - 60 = 324$ — те же. В момент $t = 96$ мин катер у A, а лодка на $0{,}6L$ — как в условии. По графику рис. 2 встреч три (60, 160 и 310 мин), других пересечений линий нет.

Смысл: течение не мешает ни при встрече навстречу, ни при расчёте «кто кого догнал» по одному берегу — нужны только скорости относительно берега, и их три неизвестных сводятся к отношению к скорости течения.

Ответ. 1) 96 мин; 2) 100 мин; 3) 150 мин.