Марсоход и график обратной скорости

Задача 1. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 1] Марсоход двигался по поверхности красной планеты. Его бортовой компьютер дал сбой и в течение 12 минут строил график зависимости обратной величины средней путевой скорости $\frac{1}{V_{\text{ср}}}$ от времени t (которую компьютер вычислял с момента сбоя). Помогите ученым расшифровать полученные результаты.

1) Постройте график зависимости мгновенной скорости марсохода от времени.
2) Определите путь, пройденный марсоходом за эти 12 минут.

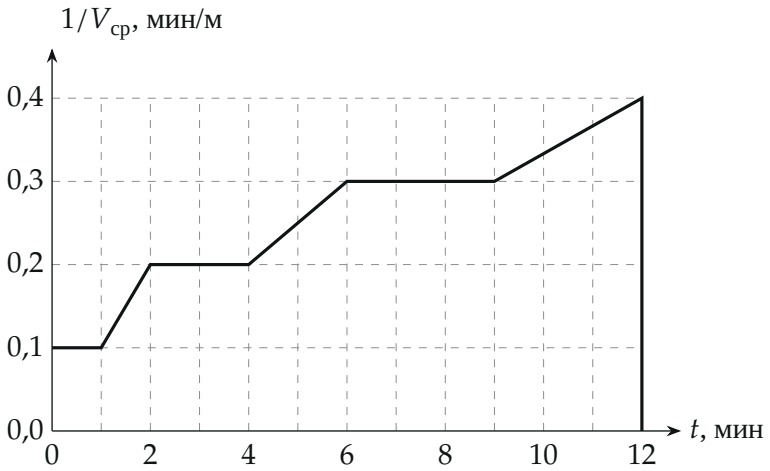


Рис. 1. График $1/V_{ср}(t)$ из условия

▲ **Решение. Что происходит.** Компьютер считал среднюю путевую скорость с момента сбоя: путь от момента сбоя $S(t)$, делённый на время t, то есть $V_{\text{ср}} = S/t$. График показывает величину $y(t) = \frac{1}{V_{\text{ср}}} = \frac{t}{S}$. Отсюда путь восстанавливается как $S(t) = t/y(t)$, а мгновенная скорость — это скорость роста пути, $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ на каждом участке. Ключ в том, что график составлен из отрезков двух видов: горизонтальных и наклонных, и у каждого вида своё объяснение.

Обозначения. t — время от сбоя, мин; $S(t)$ — путь от сбоя, м; $y = 1/V_{ср}$ — ордината графика, мин/м; v — мгновенная скорость, м/мин.

1. Горизонтальные участки (y = const). Тогда $V_{ср} = 1/y$ не меняется, а $S = V_{ср}\,t$ — путь растёт строго пропорционально времени, то есть движение равномерное с мгновенной скоростью $v = V_{ср} = 1/y$. Три таких участка: 0–1 мин ($y = 0{,}1$), 2–4 мин ($y = 0{,}2$), 6–9 мин ($y = 0{,}3$):

$$v_1 = \frac{1}{0{,}1} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}, \qquad v_2 = \frac{1}{0{,}2} = 5\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}, \qquad v_3 = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

2. Наклонные участки (1–2, 4–6 и 9–12 мин). Здесь y растёт. Продлим каждую наклонную прямую до оси t: она приходит в начало координат. Проверим числами: отношение y/t на концах каждого участка одинаково — $0{,}1/1 = 0{,}2/2 = 0{,}1$; $0{,}2/4 = 0{,}3/6 = 0{,}05$; $0{,}3/9 = 0{,}4/12 = \dfrac{1}{30}$. Прямая через начало координат — это $y = kt$ с постоянным k, а тогда

$$S = \frac{t}{y} = \frac{1}{k} = \text{const}.$$

Путь на таких участках не меняется: марсоход стоит, $v = 0$. Физически $V_{ср} = S/t$ убывает потому, что идёт время, а путь прежний.

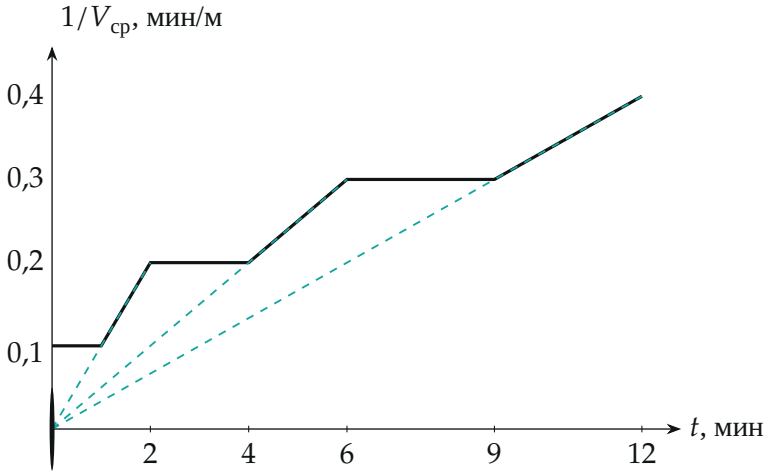


Рис. 2. Продолжения наклонных участков (пунктир) приходят в начало ко-

ординат: на них $y/t = \text{const}$, путь $S = t/y$ постоянен

3. График мгновенной скорости. Участки по порядку: 0–1 мин — 10 м/мин; 1–2 мин — стоит; 2–4 мин — 5 м/мин; 4–6 мин — стоит; 6–9 мин — 10/3 м/мин; 9–12 мин — стоит.

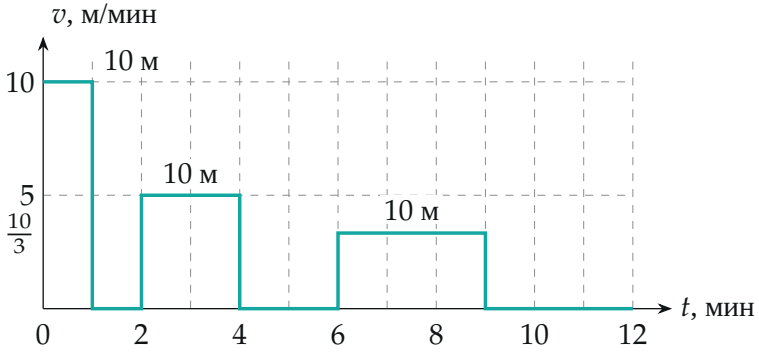


Рис. 3. Мгновенная скорость марсохода; площадь под каждой ступенью — пройденный путь (10 м на каждой)

4. Путь за 12 минут. Путь на равномерном участке — скорость на время, на остановках путь не растёт:

$$S = 10 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \frac{10}{3} \cdot 3 = 10 + 10 + 10 = 30 \text{ м}.$$

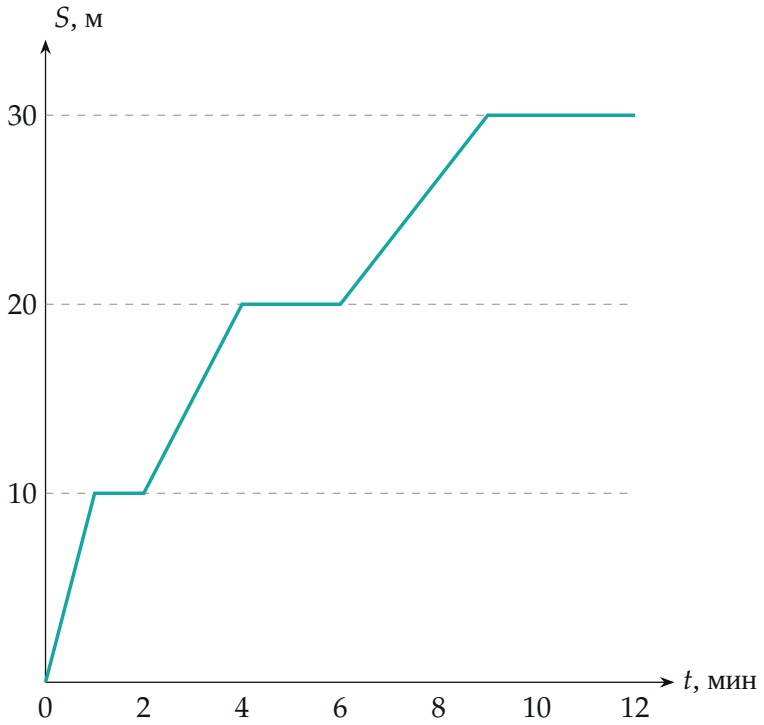


Рис. 4. Путь $S(t)$: растёт только на равномерных участках, на остановках — горизонтально

Проверка. Второй способ: по последней точке графика $y(12) = 0{,}4$ мин/м, то есть $V_{ср} = 2{,}5$ м/мин, $S = V_{ср}\,t = 2{,}5 \cdot 12 = 30$ м — совпадает. Размерность: v в м/мин, S в м. Согласованность: при $t = 9$ мин $S = 9/0{,}3 = 30$ м — уже весь путь, и дальше путь не растёт, поэтому y растёт по прямой через начало координат.

Смысл: обратная средняя скорость — «сколько минут на метр»; пока марсоход едет, это число постоянно, а пока стоит, растёт вместе со временем.

Ответ. 1) график — рис. 3: 10 м/мин на 0–1 мин, 0 на 1–2 мин, 5 м/мин на 2–4 мин, 0 на 4–6 мин, 10/3 м/мин на 6–9 мин, 0 на 9–12 мин; 2) $S = 30$ м.