Орехи в трубе с водой

Задача 2. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 2] В цилиндрическую трубу постоянного сечения, частично заполненную толстым слоем орехов, снизу поступает вода со скоростью $w = 0{,}5$ см/с. Орехи при этом всплывают как единое целое со скоростью $u = 0{,}2$ см/с (скорости w и u отличаются потому, что между стенками трубы и орехами есть трение). Объём одного ореха $\Omega = 25$ см^3, в одном литре их содержится $n = 30$ штук. Найдите скорость V подъёма уровня воды внутри слоя орехов (то есть границы между сухими и мокрыми орехами). Ниже уровня воды зазоры между орехами полностью заполнены водой, а выше этого уровня — воздухом.

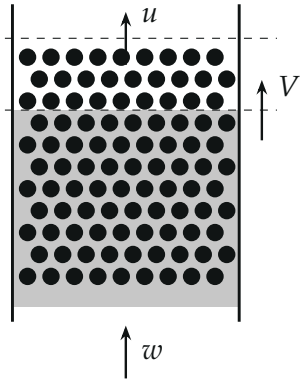


Рис. 1. Труба: серым показана вода, ниже слоя орехов — чистая вода; w — скорость воды снизу, u — скорость орехов, V — скорость границы сухих и мокрых орехов

▲ **Решение. Что происходит.** Вода поступает снизу, слой орехов всплывает вверх, а граница, до которой вода заполнила зазоры между орехами, поднимается ещё быстрее. Объём воды в трубе меняется только за счёт притока, поэтому надо записать, из чего складывается объём воды в трубе, и приравнять скорость его роста к притоку w на единицу площади. Закон один: сохранение объёма воды (вода несжимаема, в трубе ей некуда деться).

Обозначения. Ось z — вертикально вверх вдоль трубы, S — площадь сечения, z_b — координата нижней границы слоя орехов (она движется

со скоростью u), z_w — координата границы сухих и мокрых орехов (скорость V), φ — доля объёма слоя, занятая орехами, $1-\varphi$ — доля зазоров.

1. Доля объёма, занятая орехами. В литре (1000 см^3) слоя лежат $n = 30$ орехов объёмом по 25 см^3:

$$\varphi = \frac{n\Omega}{1000\ \text{см}^3} = \frac{30 \cdot 25}{1000} = 0{,}75, \qquad 1-\varphi = 0{,}25.$$

Зазоры составляют 25 % объёма слоя.

2. Объём воды в трубе. Ниже слоя орехов вода заполняет всё сечение, выше границы z_w воды нет. Между z_b и z_w вода занимает только зазоры. Объём воды (отсчитываем от какого-то неподвижного уровня, добавка постоянна):

$$W = S\,z_b + (1-\varphi)\,S\,(z_w - z_b) + \text{const}.$$

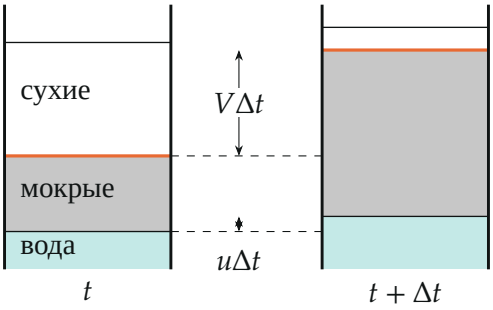


Рис. 2. Два момента: нижняя граница орехов сдвинулась на $u\Delta t$ (мелкая стрелка), граница сухих и мокрых орехов — на $V\Delta t$; красная линия — граница воды в слое

3. Скорость изменения объёма. За время Δt границы сдвигаются: $\Delta z_b = u\Delta t$, $\Delta z_w = V\Delta t$. Объём воды растёт на

$$\Delta W = S\,u\Delta t + (1-\varphi)\,S\,(V-u)\,\Delta t.$$

Расчёт: растёт чистая вода под орехами (орехи уехали вверх) и подмокает слой над ней: граница ушла вверх быстрее орехов, и в добавленной

полосе зазоры заполнились. Вода в трубу добавляется только снизу, за Δt втекает $\Delta W = S\,w\,\Delta t$ (скорость w — на свободном сечении).

4. Приравниваем. После сокращения $S\Delta t$:

$$w = u + (1-\varphi)\,(V-u) \;\Rightarrow\; V = u + \frac{w-u}{1-\varphi} = \frac{w-\varphi u}{1-\varphi} = \frac{w - un\Omega}{1-n\Omega}.$$

Здесь $n\Omega$ — безразмерная доля $\varphi = 0{,}75$ (объём ореха на число орехов в см^3, на 1000 см^3). Подставляем:

$$V = \frac{0{,}5 - 0{,}75\cdot 0{,}2}{1-0{,}75} = \frac{0{,}5-0{,}15}{0{,}25} = 1{,}4\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

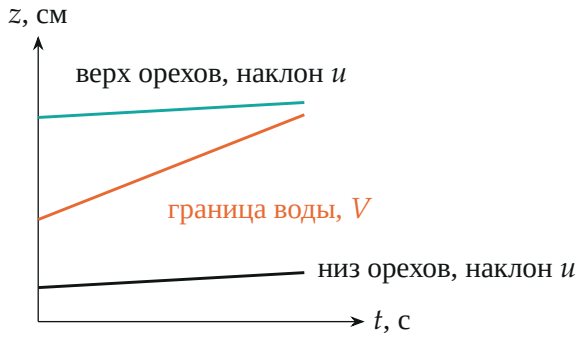


Рис. 3. Координаты от времени (масштаб условный): низ и верх слоя орехов поднимаются с u, граница сухих и мокрых орехов — с $V = 1{,}4$ см/с, то есть в 7 раз быстрее, и через $\approx 1{,}25$ с догонит верх слоя

Проверка. Второй способ — в системе отсчёта орехов. Орехи неподвижны, вода входит в слой снизу со скоростью $w - u = 0{,}3$ см/с (относительная скорость), а заполнять нужно только зазоры, которых 25 %: граница поднимается относительно орехов со скоростью $\dfrac{0{,}3}{0{,}25} = 1{,}2$ см/с. Возвращаясь в систему трубы, прибавляем скорость орехов: $V = 1{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4$ см/с — то же. Предел: если орехов нет ($\varphi = 0$), $V = w$ — уровень поднимается со скоростью воды. Размерность: см/с.

Ответ. $V = \dfrac{w - un\Omega}{1-n\Omega} = 1{,}4$ см/с.