Верёвка на ветках сосны

Задача 3. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 3] Турист бросил со скалы однородную гибкую веревку длиной 45 м. Веревка повисла на двух ветках сосны и висит неподвижно. Получились четыре почти вертикальных отрезка веревки, как показано на рисунке 1. Ветки располагались на одном горизонтальном уровне на высоте $H = 25$ метров над землёй на расстоянии не больше метра друг от друга (рис. 2).

На каком минимальном расстоянии от земли могла находиться самая нижняя точка веревки? Верёвка не соскальзывает с веток благодаря силе трения, поэтому модули сил натяжения T_1 и T_2 вертикальных участков веревки вблизи ветки по разные стороны от нее (см. рис. 3) могут быть разными, но их отношение T_1/T_2 для рассматриваемого случая не может быть больше 2. Диаметр веток намного меньше длины веревки.



Рис. 1. Рисунок 1 условия: верёвка, брошенная туристом со скалы, повисла на ветках сосны

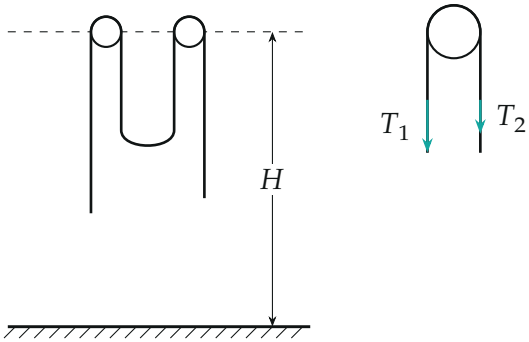


Рис. 2. Рисунки 2 и 3 условия: две ветки на высоте H и верёвка, образующая четыре почти вертикальных участка (слева), и силы натяжения по разные стороны от ветки (справа)

▲ **Решение. Что происходит.** Верёвка висит на двух ветках. У каждой ветки трение держит перевес: тяжёлая сторона может быть не больше чем вдвое тяжелее лёгкой по натяжению. Чем ниже оказалась нижняя точка верёвки, тем больше надо перекосить верёвку по длине. Значит, нужно найти самую «перекошенную» конфигурацию, допускаемую трением, и посмотреть, где у неё нижняя точка. Законы: равновесие каждого вертикального участка и ограничение на отношение натяжений.

Обозначения. λ — масса единицы длины верёвки, a — длина левого внешнего участка (от левой ветки вниз до конца), b — длина правого внешнего участка, c — длина каждого из двух внутренних участков между ветками (длина всей петли внизу между ветками $2c$). Расстояние между ветками (до 1 м) и диаметры веток малы, их вкладом в длину верёвки пренебрегаем.

1. Длина верёвки.

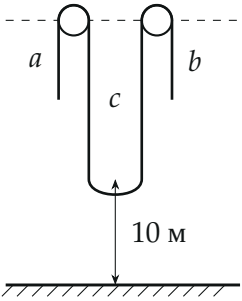
$$a + b + 2c = 45 \text{ м}.$$

2. Натяжение каждого участка. Участок, свисающий с ветки, в равновесии: сила натяжения вверху равна его весу (конец внизу свободен). Внешние участки дают $T_a = \lambda g a$ и $T_b = \lambda g b$. Внутреннюю петлю между ветками, длиной $2c$, держат обе ветки поровну (ветки на одном уровне, петля симметрична): у каждой ветки со стороны петли $T_c = \lambda g c$.

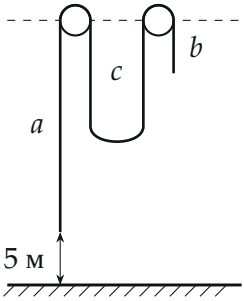
3. Условие трения. У левой ветки: $\frac{1}{2} \le \frac{a}{c} \le 2$; у правой: $\frac{1}{2} \le \frac{b}{c} \le 2$. Нижняя точка верёвки — конец более длинного из a, b или нижняя точка петли на глубине c. Её высота над землёй

$$h = H - \max(a,\, b,\, c).$$

Чтобы h было минимальным, надо сделать $\max(a, b, c)$ наибольшим.



Случай 1: $a = b = 7{,}5$ м, $c = 15$ м



Случай 2: $a = 20$ м, $b = 5$ м, $c = 10$ м

Рис. 3. Две предельные конфигурации (масштаб: 0,14 см на метр): в первой самая низкая точка — петля, во второй — левый внешний конец

4. Случай 1: самая нижняя точка — петля (c наибольшее). Ограничения $c \le 2a$ и $c \le 2b$ дают $a, b \ge c/2$. Тогда $45 = a+b+2c \ge \frac{c}{2}+\frac{c}{2}+2c = 3c$, то есть $c \le 15$ м. Нижняя точка на высоте $h = 25 - 15 = 10$ м.

5. Случай 2: самая нижняя точка — внешний конец (a наибольшее, для b то же самое). Ограничения: $a \le 2c$ и $b \ge c/2$. Тогда $c \ge a/2$, $b \ge c/2 \ge a/4$ и

$$45 = a + b + 2c \ge a + \frac{a}{4} + a = \frac{9}{4}a \;\Rightarrow\; a \le 20 \text{ м}.$$

Предельное значение $a = 20$ достигается при $c = 10$ и $b = 5$ (проверка: $20 + 5 + 20 = 45$; $a/c = 2$, $c/b = 2$). Нижняя точка — на высоте $h = 25 - 20 = 5$ м.

6. Что ниже. Из двух случаев нижняя точка ниже во втором ($20 > 15$

м). Больше глубины верёвка не достигает: $\max(a, b, c) \leq 20$ м всегда, значит $h_{\min} = 25 - 20 = 5$ м.



Рис. 4. Длина верёвки 45 м, разбитая на участки a, c, c, b для двух предельных случаев

Проверка. Размерность: метры. Проверка ограничений в предельной конфигурации ($a = 20$, $b = 5$, $c = 10$): левая ветка $a/c = 2$, правая $c/b = 2$ — на пределе трения, как и должно быть при экстремуме. Если трения нет ($T_1 = T_2$, то есть $a = c = b$): $4a = 45$, $a = 11{,}25$ м, нижняя точка на 13,75 м от земли — выше, чем 5 м, значит трение действительно позволяет опустить нижнюю точку ниже.

Смысл: трение у ветки позволяет верёвке «перекоситься» вдвое, и самая нижняя точка уходит вниз на 20 м от веток, а не на 11 м, как было бы без трения.

Ответ. 5 м.