Смеси двух жидкостей в трёх колбах

Задача 5. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 5] В лаборатории у юного химика в двух стаканах хранились две жидкости разного объёма: в одном — синяя, а в другом — красная. Однажды химик смешал половину синей и половину красной жидкости в колбе, получив смесь с плотностью ρ_1. Остатки жидкостей из стаканов он смешал во второй и третьей колбе, при этом плотность смеси во второй колбе оказалась равной ρ_2, а в третьей — ρ_3. Найдите отношение объемов трёх получившихся смесей и запишите условие, которому должны удовлетворять плотности этих смесей. Считайте, что при смешивании жидкостей их объемы складываются.

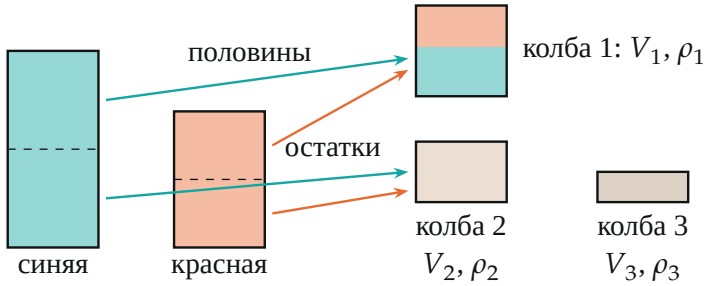


Рис. 1. Поясняющий рисунок: две половины идут в колбу 1, остатки (тоже две половины) — в колбы 2 и 3

▲ **Решение.** **Что происходит.** В первую колбу ушла ровно половина каждой жидкости. Всё, что осталось в стаканах, — тоже ровно половина каждой жидкости. Значит, вещество колб 2 и 3 вместе — та же смесь тех же жидкостей в той же пропорции, что и в колбе 1. Если слить колбы 2 и 3 вместе, получится жидкость той же плотности ρ_1 и того же объёма V_1. Остаётся записать, как складывается средняя плотность: масса сливаемого — сумма масс.

Обозначения. V_1, V_2, V_3 — объёмы смесей в колбах, ρ_1, ρ_2, ρ_3 — плотности. Объёмы при смешивании складываются, поэтому объём смеси в колбе равен сумме объёмов налитых жидкостей.

1. Сливаем колбы 2 и 3. В колбе 1 было по половине синей и красной жидкости, и в колбах 2 и 3 вместе — тоже по половине. Значит, содержимое колб 2 и 3 вместе — те же количества синей и красной жидкости,

что в колбе 1: объём и масса те же,

$$V_2 + V_3 = V_1, \qquad M_2 + M_3 = M_1,$$

$$\rho_2 V_2 + \rho_3 V_3 = \rho_1 V_1 = \rho_1 (V_2 + V_3).$$

2. Отношение объёмов колб 2 и 3. Собираем члены с V_2 и V_3:

$$V_2 (\rho_2 - \rho_1) = V_3 (\rho_1 - \rho_3) \;\Rightarrow\; \frac{V_2}{V_3} = \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Объёмы положительны, поэтому числитель и знаменатель — одного знака: ρ_1 лежит *между* ρ_2 и ρ_3. Возможны два случая.

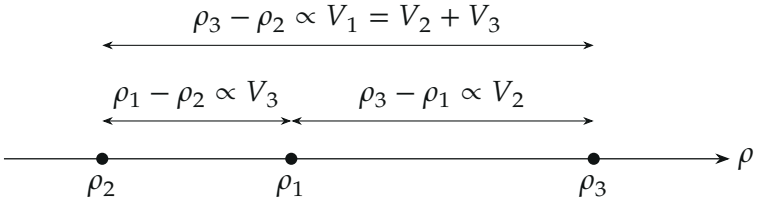


Рис. 2. Правило рычага для плотностей, случай а): ρ_1 делит отрезок $[\rho_2; \rho_3]$ на части, пропорциональные объёмам «чужих» колб: $\rho_1 - \rho_2 \propto V_3$ и $\rho_3 - \rho_1 \propto V_2$

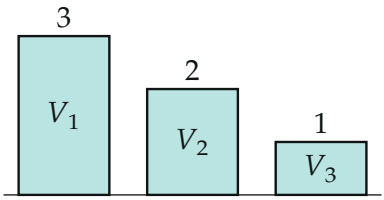
3. Случай а): $\rho_2 < \rho_1 < \rho_3$. Все разности положительны: $V_2 : V_3 = (\rho_3 - \rho_1) : (\rho_1 - \rho_2)$. Объём первой колбы равен сумме $V_1 = V_2 + V_3$, то есть он пропорционален сумме частей $(\rho_3 - \rho_1) + (\rho_1 - \rho_2) = \rho_3 - \rho_2$:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (\rho_3 - \rho_2) : (\rho_3 - \rho_1) : (\rho_1 - \rho_2), \qquad \rho_3 > \rho_1 > \rho_2.$$

4. Случай б): $\rho_2 > \rho_1 > \rho_3$. Зеркально, все разности меняют знак:

$$V_1 : V_2 : V_3 = (\rho_2 - \rho_3) : (\rho_1 - \rho_3) : (\rho_2 - \rho_1), \qquad \rho_2 > \rho_1 > \rho_3.$$

Оба случая — одна формула с модулями: $V_1 : V_2 : V_3 = |\rho_3 - \rho_2| : |\rho_3 - \rho_1| : |\rho_1 - \rho_2|$ при условии, что ρ_1 лежит между ρ_2 и ρ_3.



$\rho_2 = 1,\ \rho_1 = 2,\ \rho_3 = 4$ г/см^3
$V_1 : V_2 : V_3 = 3 : 2 : 1$

Рис. 3. Пример: при $\rho_2 = 1$, $\rho_1 = 2$, $\rho_3 = 4$ г/см^3 объёмы относятся как $3 : 2 : 1$, и $V_1 = V_2 + V_3$

Проверка. На примере рис. 3: масса колб 2 и 3 вместе $1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 6$ (в тех же единицах), объём $2 + 1 = 3$, средняя плотность $6/3 = 2 = \rho_1$ — верно. Предел: если ρ_1 приближается к ρ_3, то $V_3 \to 0$ и $V_1 \to V_2$ — третья колба почти пуста, как и должно быть. Если бы ρ_1 была вне отрезка $[\rho_2; \rho_3]$, объёмы вышли бы отрицательными, что невозможно, откуда и условие.

Смысл: средняя плотность любой смеси лежит между плотностями смешиваемых жидкостей, ближе к той, которой больше по объёму — правило рычага.

Ответ. а) $V_1 : V_2 : V_3 = (\rho_3 - \rho_2) : (\rho_3 - \rho_1) : (\rho_1 - \rho_2)$, при $\rho_3 > \rho_1 > \rho_2$; б) $V_1 : V_2 : V_3 = (\rho_2 - \rho_3) : (\rho_1 - \rho_3) : (\rho_2 - \rho_1)$, при $\rho_2 > \rho_1 > \rho_3$.