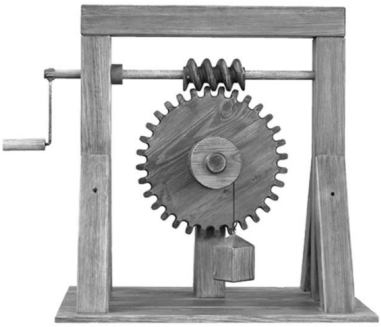
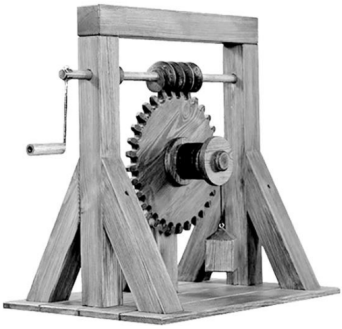
Червячная передача да Винчи

Задача 6. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 6] В последние годы стали популярны выставки, на которых демонстрируют простейшие механизмы, якобы сделанные по чертежам Леонардо да Винчи. На фотографиях показан экспонат одной из таких выставок: он называется *червячная передача*. Какой выигрыш в силе (без учета трения) даёт это устройство? Считайте, что длина ворота (от ручки до горизонтальной оси) в два раза больше диаметра барабана, на который наматывается веревка.





▲ **Решение. Что происходит.** Устройство — цепочка из двух простых механизмов. Ручку крутят вокруг оси червяка (ворот), червяк зацепляется с зубчатым колесом и поворачивает его, а на оси колеса сидит барабан, на который наматывается верёвка с грузом. Без трения работа не теряется: сила на ручке, умноженная на её путь, равна силе тяжести груза, умноженной на высоту подъёма («золотое правило механики»). Значит, выигрыш в силе равен отношению путей: во сколько раз путь ручки больше пути груза.

Обозначения. R — длина ворота (от оси червяка до ручки), r — радиус барабана, $D = 2r$ — его диаметр, N — число зубьев колеса, F — сила на ручке, P — вес груза, s_1 — путь конца ручки, s_2 — путь груза. По условию $R = 2D = 4r$.

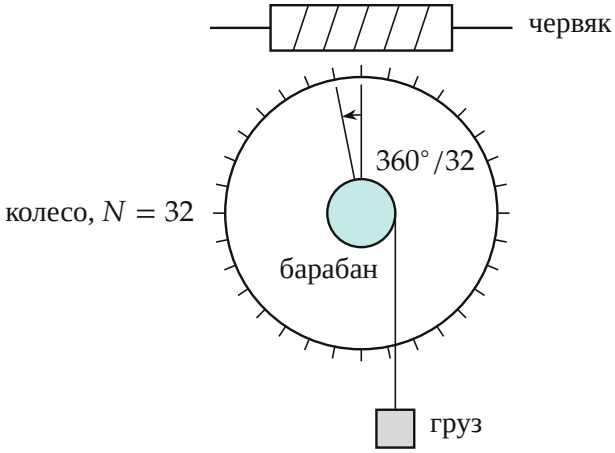


Рис. 1. Схема: однозаходный червяк за один оборот сдвигает колесо на один зуб, то есть на угол $360°/N$; барабан сидит на оси колеса и поворачивается на тот же угол

1. Путь ручки за один оборот. Конец ручки описывает окружность радиуса $R = 4r$:

$$s_1 = 2\pi R = 8\pi r.$$

2. Поворот колеса. За один оборот червяк сдвигает колесо ровно на один зуб, то есть на угол $\dfrac{2\pi}{N}$; число зубьев на фотографии $N = 32$ (соседние зубья отстоят друг от друга на $360°/32 \approx 11°$). Барабан сидит на оси колеса и поворачивается на тот же угол.

3. Путь груза. Верёвка наматывается на барабан радиуса r, и конец верёвки с грузом поднимается на длину дуги барабана:

$$s_2 = r \cdot \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi r}{32} = \frac{\pi r}{16}.$$

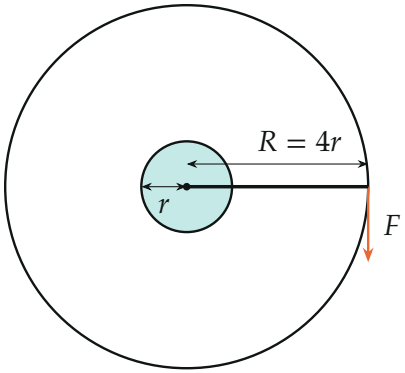


Рис. 2. Ворот: ручка длиной $R = 4r$ описывает окружность в 4 раза больше окружности барабана

4. Выигрыш в силе. Трения нет, значит работа силы на ручке равна работе против силы тяжести груза: $F\,s_1 = P\,s_2$. Выигрыш в силе

$$\frac{P}{F} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{2\pi R}{2\pi r/N} = N\,\frac{R}{r} = 32 \cdot 4 = 128.$$

Проверка. Второй способ — через два передаточных числа: ворот (рычаг с плечом R и барабан радиуса r) даёт выигрыш $R/r = 4$, а червячная пара — выигрыш в $N = 32$ раза по моментам (за 32 оборота червяка колесо делает один оборот); общий $4 \cdot 32 = 128$. Размерность: выигрыш — безразмерное отношение. Смысл: F в 128 раз меньше P, зато ручку придётся пройти путём в 128 раз длиннее, чем поднимается груз: за один оборот ручки груз поднимается на $\pi r/16$.

Ответ. Выигрыш в силе в 128 раз.