Грузы, блоки и поддон с водой

Задача 7. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 7] В широком поддоне с вертикальными стенками, который частично заполнен водой, стоит доверху наполненный водой стакан. Два цилиндрических груза удерживаются в равновесии с помощью системы блоков и нитей, как показано на рисунке. На правом грузе стоит маленький перегрузок массой Δm. При этом левый груз касается поверхности воды своей нижней гранью, а правый груз — верхней. Площадь горизонтального поперечного сечения левого груза равна S, а правого — $2S$. С правого груза очень медленно снимают перегрузок, после чего левый груз оказывается частично погруженным в воду.

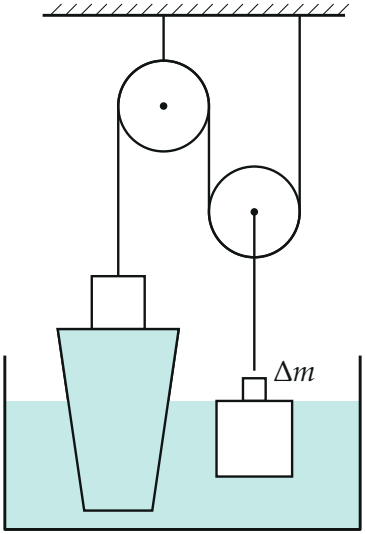


Рис. 1. Схема опыта: стакан наполнен водой доверху, левый груз касается воды в стакане нижней гранью, правый груз стоит в воде поддона верхней гранью на уровне воды

▲ **Решение. Что происходит.** Пока на правом грузе лежит перегрузок, система в равновесии. Убираем перегрузок — правая сторона становится легче, левый груз опускается вниз и погружается в воду стакана. Стакан был полон, поэтому вытесненная вода переливается в поддон. Правый груз при этом поднимается и выходит из воды поддона, а уровень

в поддоне определяется балансом воды, прибывшей из стакана, и воды, освободившей объём, где был груз. Законы: условия равновесия грузов (с силой Архимеда) до и после и неизменность объёма воды.

Обозначения. m_1 и m_2 — массы левого и правого грузов, ρ — плотность воды, T — натяжение нити (оно одинаково по всей нити: блоки невесомые и без трения), H_2 — высота правого груза, x — глубина погружения левого груза после снятия перегрузка, A — площадь дна поддона. Правый груз и подвижный блок висят на двух отрезках нити, поэтому подвижный блок с грузом поднимется на столько, на сколько вытравлена нить, делённую пополам: если левый груз опустился на x, правый поднимается на $x/2$.

1. Равновесие до снятия перегрузка. Левый груз только касается воды, силы Архимеда на него нет: $T_0 = m_1 g$. Подвижный блок вместе с правым грузом и перегрузком держат две нити: $2T_0$ вверх, вниз — вес $(m_2 + \Delta m)g$, вверх — сила Архимеда на целиком погружённый правый груз $\rho g \cdot 2S\,H_2$:

$$2m_1 g = (m_2 + \Delta m)\, g - 2\rho g S H_2.$$

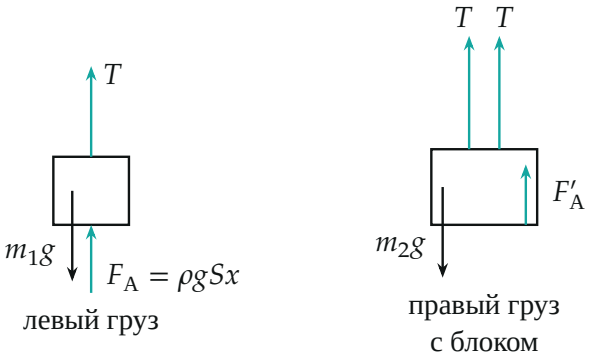


Рис. 2. Силы после снятия перегрузка: на левый груз — натяжение T, сила тяжести $m_1 g$ и сила Архимеда на погружённую часть; на правый груз с блоком — две нити, вес $m_2 g$ и сила Архимеда на оставшуюся в воде часть

2. Равновесие после снятия перегрузка. Левый груз погружён на глубину x (в воду стакана, он полон, уровень там не меняется) — вытес-

няет объём Sx:

$$T = m_1 g - \rho g S x.$$

Правый груз поднялся на $x/2$ относительно воды поддона (уровень воды в поддоне h — пока считаем неизменным, ниже проверим), то есть его верхняя часть высотой $x/2$ вышла из воды, а объём погружённой части уменьшился на $2S \cdot \dfrac{x}{2} = Sx$. Сила Архимеда уменьшилась на $\rho g S x$:

$$2T = m_2 g - \rho g \cdot 2S\left(H_2 - \frac{x}{2}\right) = m_2 g - 2\rho g S H_2 + \rho g S x.$$

3. Вычитаем равновесие до снятия. Вычтем из последнего равенства равенство до снятия ($2T_0 = (m_2 + \Delta m)g - 2\rho g S H_2$), подставив $T - T_0 = -\rho g S x$:

$$-2\rho g S x = -\Delta m\, g + \rho g S x \;\Rightarrow\; x = \frac{\Delta m}{3\rho S}.$$

4. Масса воды, перелившейся из стакана. Вытесненный левым грузом объём Sx воды вытекает из полного стакана в поддон:

$$m_{\text{воды}} = \rho S x = \frac{\Delta m}{3}.$$

5. Уровень в поддоне. Пусть он изменился на δh (вверх, если положительно). Объём воды в поддоне вырос на Sx (пришло из стакана), а объём вытесняемой правым грузом воды изменился: груз поднялся на $x/2$ над начальным положением, вода — на δh, значит, над водой оказался слой груза высотой $x/2 - \delta h$, и вытесняемый объём уменьшился на $2S\left(\dfrac{x}{2} - \delta h\right) = Sx - 2S\delta h$. Объём, занятый водой и погружённой частью груза в поддоне, равен $A\,h$:

$$A\,\delta h = Sx - (Sx - 2S\delta h) = 2S\,\delta h \;\Rightarrow\; (A - 2S)\,\delta h = 0.$$

Поддон широкий ($A \neq 2S$), значит $\delta h = 0$: уровень воды в поддоне не изменился.

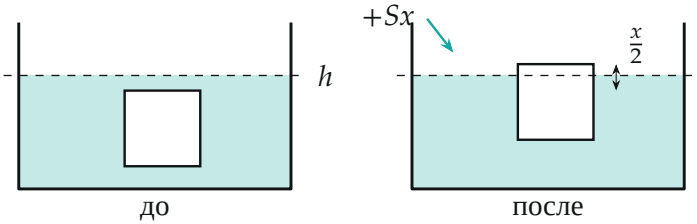


Рис. 3. Поддон до и после: уровень h (пунктир) не изменился — вода из стакана ($+Sx$) занимает ровно тот объём, который освободил поднявшийся правый груз

6. Зависимость от Δm. Из пункта 3: $x = \dfrac{\Delta m}{3\rho S}$ — прямая пропорциональность: график $x(\Delta m)$ — прямая, проходящая через начало координат, с наклоном $\dfrac{1}{3\rho S}$ (пока левый груз не ушёл в воду целиком).

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{кг}}{(\text{кг/м}^3)\cdot \text{м}^2} = \text{м}$. Знак: перегрузок убрали — левый груз пошёл вниз, $x > 0$. Масса перелитой воды $\Delta m/3 < \Delta m$: часть перепада принимает на себя правый груз, выходя из воды.

Смысл: опустившись, левый груз вытеснил воду, правый груз приподнялся и освободил столько же объёма — поэтому уровень в поддоне остался на месте.

Ответ. 1) уровень воды в поддоне не изменится; 2) из стакана в поддон перельётся вода массой $\Delta m/3$; 3) глубина погружения левого груза $x = \dfrac{\Delta m}{3\rho S}$ — прямая пропорциональность массе перегрузка.