Горячая жидкость во льду

Задача 8. [МОШ 2017/18, 8 класс, задача 8] Очень толстый слой льда имеет температуру 0 °C. Полярник решил провести эксперимент. Для этого он сделал во льду небольшую лунку и накрыл её слоем теплоизолятора, в который была вставлена тонкая трубка. Через эту трубку полярник очень медленно заливал в лунку неизвестную горячую жидкость с удельной теплоёмкостью c и плотностью ρ. Жидкость плавила лёд, и глубина лунки увеличивалась. Полярник обнаружил, что существует некоторое минимальное значение начальной температуры жидкости t_0, при котором в лунку можно залить сколь угодно большое количество жидкости, и лёд будет продолжать плавиться. При этом поверхность образующейся воды никогда не поднимется до верхнего края лунки. Найдите это минимальное значение t_0. Удельная теплота плавления льда λ, а также плотности воды и льда $\rho_в$ и $\rho_л$ известны.

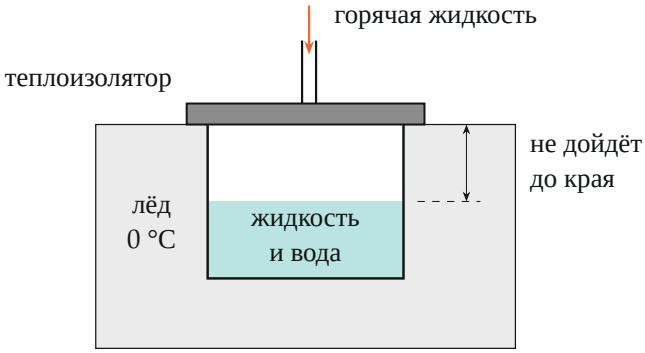


Рис. 1. Поясняющий рисунок: лунка под теплоизолятором, горячая жидкость заливается через трубку; поверхность воды в лунке остаётся ниже края

▲ **Решение. Что происходит.** Горячая жидкость отдаёт льду тепло и остывает до 0 °C — на это тепло плавится лёд, и лунка растёт. Но лёд тает с *уменьшением* объёма: вода плотнее льда, и из объёма V_1, который занимал лёд, получается меньший объём воды. Лунка освобождает объём, который тратится на воду от растаявшего льда и на сами залитые жидкости. Если жидкость слишком холодная, лунка растёт слишком

медленно и жидкость в какой-то момент достигает края. Минимальная t_0 — когда освободившийся объём лунки в точности равен объёму всей жидкости в ней, считая на каждый грамм залитой жидкости. Закон: тепловой баланс и сохранение объёмов.

Обозначения. m — масса залитой жидкости, m_1 — масса растаявшего льда, V_1 — объём, освободившийся в лунке при таянии льда, V_2 — объём воды, образовавшейся из этого льда, V_3 — объём залитой жидкости. Теплопотерями в теплоизолятор и вокруг лунки пренебрегаем (жидкость и вода в лунке при 0 °C, лёд вокруг тоже при 0 °C).

1. Тепловой баланс. Жидкость массы m остывает от t_0 до 0 °C и отдаёт $c\,m\,t_0$; это тепло плавит лёд массой m_1:

$$c\,m\,t_0 = \lambda\,m_1 \;\Rightarrow\; m_1 = \frac{c\,m\,t_0}{\lambda}.$$

2. Три объёма. Масса m_1 льда занимала объём $V_1 = \dfrac{m_1}{\rho_л}$ — лунка расширилась на столько. Из того же льда получилась вода объёмом $V_2 = \dfrac{m_1}{\rho_в}$. Залитая жидкость занимает $V_3 = \dfrac{m}{\rho}$.

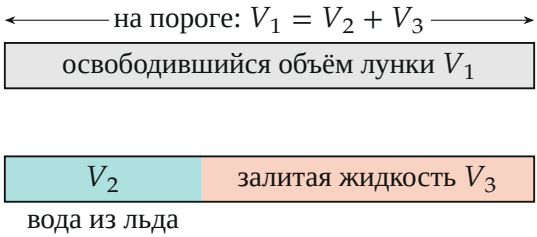


Рис. 2. Объёмы: при минимальной температуре освободившийся объём лунки V_1 равен объёму воды V_2 и залитой жидкости V_3 вместе

3. Условие «до края не дойдёт». Объём всего, что находится в лунке (вода от льда и залитая жидкость), не должен превышать объёма, который освободился при таянии (начальный объём лунки — константа, при больших m им можно пренебречь, важен рост):

$$V_2 + V_3 \le V_1.$$

Подставляем:

$$\frac{m_1}{\rho_в}+\frac{m}{\rho}\le\frac{m_1}{\rho_л}\ \Rightarrow\ \frac{m}{\rho}\le m_1\left(\frac{1}{\rho_л}-\frac{1}{\rho_в}\right)=\frac{c\,m\,t_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho_в-\rho_л}{\rho_л\rho_в}.$$

Масса m сократилась — условие не зависит от того, сколько залито, поэтому его выполнение гарантирует: можно лить сколько угодно. Решаем относительно t_0:

$$t_0\ge\frac{\lambda\,\rho_в\rho_л}{c\,\rho\,(\rho_в-\rho_л)}.$$

Минимальное значение — знак равенства.

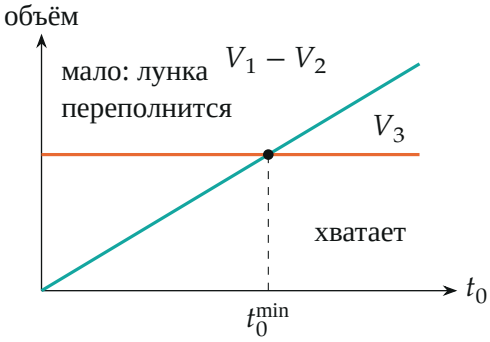


Рис. 3. Свободный объём V_1-V_2 растёт с t_0 (бирюза), объём залитой жидкости V_3 не зависит от t_0 (морковная линия); пересечение — $t_0^{\min}$

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Дж/кг}\cdot(\text{кг/м}^3)^2}{\text{Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}\cdot(\text{кг/м}^3)\cdot(\text{кг/м}^3)}=\,^\circ\text{C}$, как должно быть. Предел: если $\rho_л\to\rho_в$, лёд при таянии не меняет объёма, лунка не освобождает места и $t_0\to\infty$ — залить много не удастся при любой температуре. Если жидкость плотная (большое ρ), на её заливку идёт меньше объёма, и t_0 меньше. Теплоёмкость c больше — тепла на единицу t_0 больше, и t_0 нужна меньшая.

Смысл: лёд расширяется при замерзании, поэтому, тая, он оставляет немного свободного места; хватит ли этого места на горячую жидкость, решает то, сколько льда она успеет растопить.

Ответ. $t_0=\dfrac{\lambda\,\rho_в\rho_л}{c\,\rho\,(\rho_в-\rho_л)}$.