Анаморфные призмы

Задача 1. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 1] Две одинаковые призмы ($\alpha = 30°$, рис. 1), изготовленные из материала с показателем преломления n, используют для изменения поперечного размера пучка параллельных лучей.

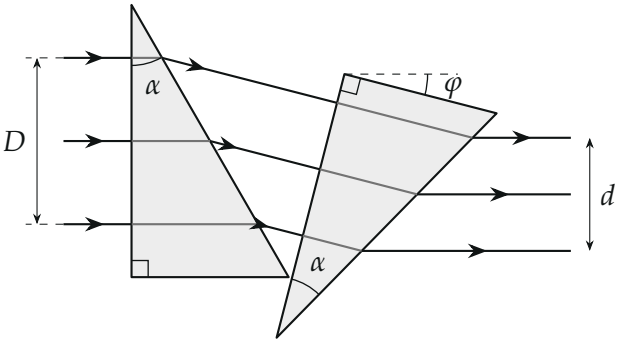


Рис. 1. Лучи построены по закону преломления при $n = 1{,}4$.

1. Для $n = 1{,}73$ найдите угол φ между основаниями призм.
2. Найдите для произвольного n отношение $\dfrac{d}{D}$. Какие значения может принимать n?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пучок параллельных лучей идёт через две одинаковые призмы и должен выйти снова параллельным, но более узким. Задача на преломление света на плоской границе; решаем её так: сначала проследим, что происходит с отдельным лучом на каждой границе (закон Снеллиуса и геометрия углов), а потом перейдём от лучей к ширине пучка. Каждый раз, прежде чем применять закон, выясняем, *под каким углом к нормали* луч падает на границу, — вся задача сводится к тому, чтобы правильно найти этот угол.

Обозначения. Показатель преломления воздуха 1. β' — угол между вышедшим из призмы лучом и нормалью к наклонной грани, $\beta = \beta' - \alpha$ — на какой угол луч отклонился от прежнего направления. d_1 — ширина пучка между призмами, ℓ — длина участка наклонной грани, на который падает пучок.

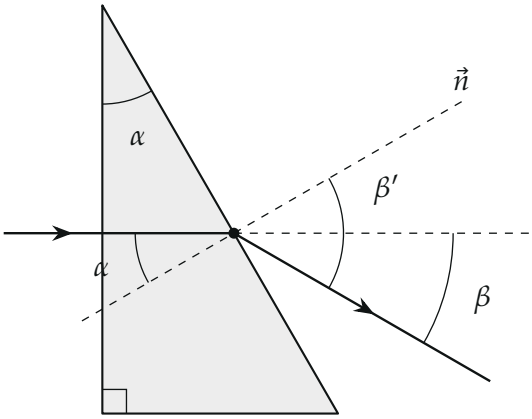
Пункт 1.

1. Основание первой призмы: луч идёт без преломления. Лучи падают на основание перпендикулярно ему, а нормаль к границе тоже перпендикулярна ей. Значит, угол между падающим лучом и нормалью равен нулю. По закону Снеллиуса $1 \cdot \sin 0 = n \sin \gamma$, откуда $\gamma = 0$: внутри стекла луч идёт в том же направлении (на рисунке условия он так и нарисован). Вывод общий: луч, падающий по нормали, не преломляется.

2. Наклонная грань: какой здесь угол падения. Луч идёт перпендикулярно основанию, а нормаль к наклонной грани перпендикулярна самой грани. Грань наклонена к основанию на угол α, поэтому и нормаль наклонена к лучу на тот же угол α (углы между взаимно перпендикулярными прямыми равны). Итак, угол падения на наклонную грань — именно α, а не $90° - \alpha$. Закон преломления при выходе из стекла в воздух:

$$n \sin \alpha = \sin \beta'.$$

Так как $n > 1$, угол β' больше α — в воздухе луч отходит от нормали. При $n = 1{,}73 \approx \sqrt{3}$ получаем $\sin \beta' = \sqrt{3}/2$, то есть $\beta' = 60°$.



Выход из первой призмы ($n = \sqrt{3}$): $\alpha = 30°$, $\beta' = 60°$, $\beta = 30°$.

3. Куда повернул луч. Нормаль к наклонной грани направлена вверх под углом α к горизонту, а луч в воздухе отходит от неё дальше, на β'. Поэтому он идёт вниз, к толстой части призмы, и повернул относитель-

но исходного горизонтального направления на

$$\beta = \beta' - \alpha = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

4. Что нужно найти и почему $\varphi = \beta$. Угол φ между основаниями — это положение второй призмы относительно первой. Как показано на рисунке условия, лучи между призмами падают на основание второй призмы по нормали (и по пункту 1 идут в ней без преломления), то есть основание второй призмы перпендикулярно лучам между призмами. Основание первой призмы перпендикулярно исходным горизонтальным лучам. Лучи между призмами повёрнуты относительно исходных на β, значит, и основания (перпендикулярные им) повёрнуты друг относительно друга на тот же угол:

$$\varphi = \beta = 30^\circ.$$

Вторая призма стоит вершиной вниз. Луч входит в неё по нормали, на её наклонной грани опять падает под углом α и выходит под тем же β' (закон тот же), но поворачивается в другую сторону — вверх, и общий поворот первой и второй призм равен нулю. Поэтому лучи на выходе снова горизонтальны, как на рисунке условия.

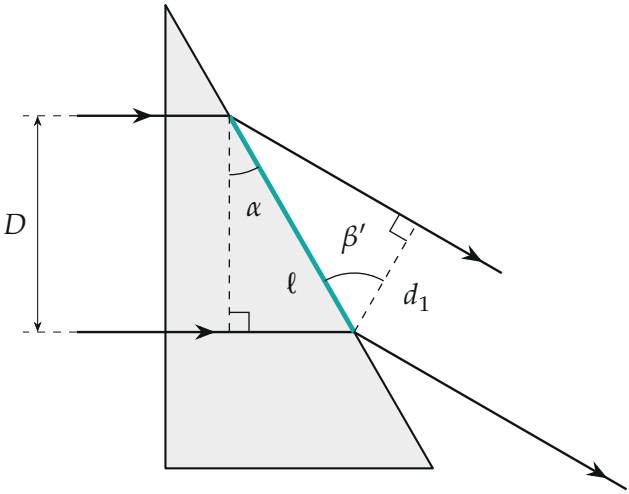
Пункт 2.

5. Пучок и косая грань: откуда меняется ширина. Рассмотрим два крайних луча пучка. На наклонной грани они падают на расстоянии ℓ друг от друга. Ширина пучка D — расстояние между лучами, то есть длина отрезка, перпендикулярного им (параллельного основанию). Грань наклонена к нему на α, значит, в прямоугольном треугольнике с гипотенузой ℓ

$$D = \ell \cos \alpha.$$

После преломления лучи тоже параллельны друг другу, но идут уже под другим углом. Ширина d_1 — по-прежнему расстояние между ними, поперёк лучей. Угол между гранью и перпендикуляром к лучам равен углу между нормалью и лучом, то есть β':

$$d_1 = \ell \cos \beta'.$$



Сечения пучка до и после наклонной грани: $D = \ell\cos\alpha$, $d_1 = \ell\cos\beta'$.

Отсюда видно, почему пучок сужается: на одном и том же отрезке грани ℓ лучи были разведены на $D = \ell\cos\alpha$, а после преломления идут «более вскользь» к грани (угол $\beta' > \alpha$, значит $\cos\beta' < \cos\alpha$), и расстояние между ними $d_1 < D$. Исключим ℓ и выразим $\cos\beta'$ через $\sin\beta' = n\sin\alpha$:

$$d_1 = D\,\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha} = D\,\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

6. Вторая призма делает то же самое. Пучок шириной d_1 входит в её основание по нормали, на наклонной грани падает под углом α и выходит под β' — те же α и β' (закон тот же). Те же рассуждения, что в пункте 5, дают

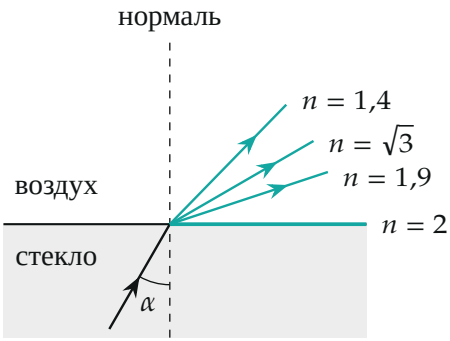
$$d = d_1\,\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha} = D\left(\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha}\right)^2 = D\,\frac{1-n^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

При $\alpha = 30°$: $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$, и

$$\frac{d}{D} = \frac{1-n^2/4}{3/4} = \frac{4-n^2}{3}.$$

7. Какие значения может принимать n. Два ограничения, и оба нужны.

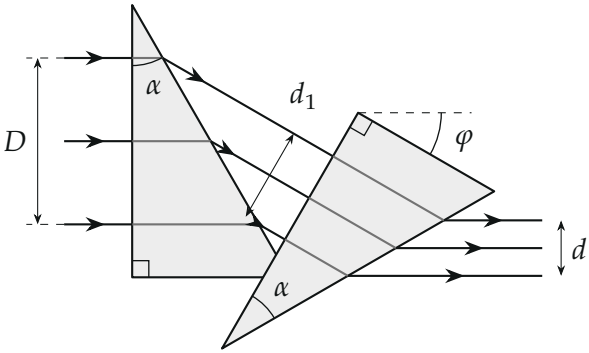
- *Снизу,* $n > 1$. Показатель преломления — это отношение скорости света в вакууме к скорости в среде, а в среде свет не может идти быстрее, чем в вакууме. При $n = 1$ призма не отличалась бы от воздуха и ничего бы не меняла.
- *Сверху,* $n < 2$. Луч выйдет из призмы, если угол β' меньше 90°, то есть $n \sin \alpha < 1$. При $n \sin \alpha = 1$ преломлённый луч скользит вдоль самой грани, а при большем n закон Снеллиуса решения не имеет: луч вовсе не выходит, а полностью отражается от грани внутрь стекла. Для $\alpha = 30°$ получается $n < 2$. Тот же результат даёт сама формула: ширина пучка d должна быть положительной, то есть $4 - n^2 > 0$.



Выход из стекла в воздух при падении под углом $\alpha = 30°$: чем больше n, тем сильнее луч уходит от нормали; при $n = 2$ он скользит вдоль грани, дальше луча нет.

Итак, $1 < n < 2$; при этом d/D убывает от 1 до 0.

Проверка. Предел $n \to 1$: $d/D \to 1$, $\beta \to 0$ — призма с показателем воздуха не меняет пучок. Предел $n \to 2$: $d/D \to 0$, преломлённые лучи скользят вдоль грани, пучок «схлопывается» — как и должно быть у границы полного отражения. Второй способ для $n = \sqrt{3}$: $d_1/D = \cos 60°/\cos 30° = 1/\sqrt{3}$, затем $d/d_1 = 1/\sqrt{3}$ и $d/D = 1/3$, что совпадает с $(4-3)/3$. Для $n = 1{,}73$ получаем $(4 - 2{,}99)/3 \approx 0{,}34$. Весь ход лучей при $n = \sqrt{3}$ показан на рисунке.



Весь ход лучей при $n = \sqrt{3}$: $\varphi = 30°$, $d_1 = D/\sqrt{3} \approx 0{,}58\,D$, $d = D/3$.

Ошибка, которой стоит избегать: угол падения на наклонную грань — это α (между лучом и *нормалью*), а не угол между лучом и гранью. И ширину пучка всегда меряем поперёк лучей, а не вдоль грани.

Смысл: наклонная грань, на которую пучок падает «вскользь», сжимает его поперёк, а две такие грани подряд сжимают сильнее (в 3 раза при $n = \sqrt{3}$), не меняя направления лучей.

Ответ. 1) $\varphi = 30°$; 2) $\dfrac{d}{D} = \dfrac{4 - n^2}{3}$, $1 < n < 2$ (то есть $n < 2$).