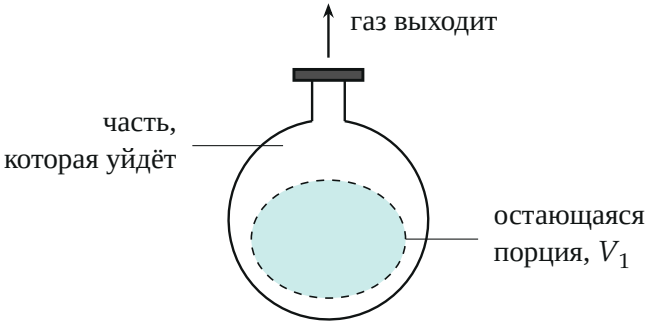
Измерение показателя адиабаты

Задача 2. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 2] Адиабатический процесс для идеального газа описывается уравнением $pV^\gamma = \text{const}$, где p — давление, V — объём, γ — безразмерная величина, называемая показателем адиабаты. Для определения γ ставят следующий эксперимент. Стеклянный баллон заполняют исследуемым газом и измеряют его давление p_1, большее атмосферного давления p_0. При этом температура в баллоне равна температуре в комнате. Затем на короткое время открывают кран и часть газа выходит из баллона. Можно считать, что при открытом кране оставшийся в баллоне газ расширяется адиабатически. Кран закрывают, когда давление в баллоне становится равно p_0. После этого дожидаются выравнивания температур в баллоне и комнате и измеряют давление в баллоне p_2 в конечном состоянии. Определите γ, если $p_0 = 10^5$ Па, $p_1 = 1{,}060 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 1{,}017 \cdot 10^5$ Па.

Примечание. Возможно, окажется полезной приближённая формула $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$.

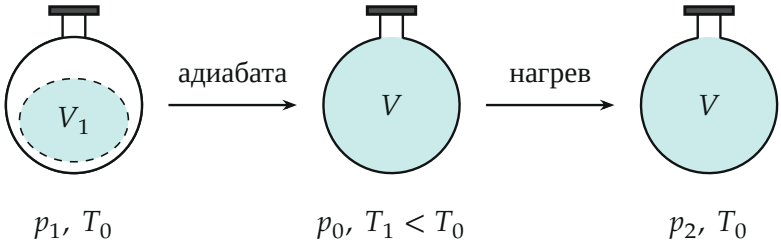


Поясняющий рисунок: газ в баллоне при открытии крана. Пунктиром отмечена порция, которая останется (масштаб условный).

▲ **Решение. Что происходит.** Газа в баллоне становится меньше, поэтому писать законы газа для «всего газа в баллоне» нельзя: его количество меняется. Выберем мысленно ту порцию, которая останется в баллоне, — её количество вещества ν постоянно, а выпущенный газ и порция в

каждый момент находятся при одинаковых давлении и температуре. Пока кран открыт, всё происходит быстро, обмена теплотой со стенками нет, и порция расширяется *адиабатически*: давление падает до p_0, газ остывает до $T_1 < T_0$. Потом кран закрыт, объём не меняется, газ от стенок греется до комнатной температуры T_0, и давление поднимается до p_2. Главное: в начале и в конце температура порции одна и та же, T_0, а давление изменилось ($p_1 \to p_2$); это и позволяет найти γ.

Обозначения. V — объём баллона, $V_1 < V$ — объём, который порция занимала при p_1 и T_0. Три состояния порции: 1 — (p_1, V_1, T_0), 2 — (p_0, V, T_1), 3 — (p_2, V, T_0).



Три состояния порции газа, которая остаётся в баллоне.

1. Какие здесь величины малы и что из этого следует. Посмотрим на числа: p_1 отличается от p_0 всего на 6 %, а p_2 — на 1,7 %. Значит, и объём порции, и её температура меняются тоже мало (это будет видно из формул). Для малых изменений есть удобный приём: не решать уравнения целиком, а считать, как изменяются величины, оставляя только первый порядок малости. Выведем два соотношения.

Уравнение состояния. Количество газа постоянно, и после малых изменений $p \to p + \delta p$, $V \to V + \delta V$, $T \to T + \delta T$ выполняется $(p + \delta p)(V + \delta V) = \nu R(T + \delta T)$. Вычтем $pV = \nu RT$ и отбросим $\delta p\, \delta V$ — произведение двух малых много меньше каждого из них:

$$p\,\delta V + V\,\delta p = \nu R\,\delta T.$$

Разделим на $pV = \nu RT$:

$$\frac{\delta p}{p} + \frac{\delta V}{V} = \frac{\delta T}{T}. \qquad (1)$$

Адиабата. Из $pV^\gamma = \text{const}$ при малых изменениях следует

$$\left(1 + \frac{\delta p}{p}\right)\left(1 + \frac{\delta V}{V}\right)^\gamma = 1.$$

Здесь пригодится формула из условия: $(1+x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$, то есть вторая скобка равна $1 + \gamma\,\delta V/V$. Раскрыв скобки и отбросив произведение малых, получаем

$$\frac{\delta p}{p} = -\gamma\,\frac{\delta V}{V}. \qquad (2)$$

Знак минус понятен: при расширении газ давит слабее.

2. Первый этап: быстрое расширение, $1 \to 2$**.** Давление изменилось на $\delta p_1 = p_0 - p_1 < 0$ (отрицательно: давление упало), температура — на $\delta T_1 = T_1 - T_0$. Исключим из (1) и (2) изменение объёма $\delta V/V = -\delta p_1/(\gamma p)$:

$$\frac{\delta p_1}{p}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\delta T_1}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta T_1}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{\delta p_1}{p}. \qquad (3)$$

Давление упало, и $\delta T_1 < 0$: газ при расширении остыл. В знаменателе можно взять любое из близких давлений (p_0 или p_1): разница даст поправку второго порядка.

3. Второй этап: нагрев при постоянном объёме, $2 \to 3$**.** Кран закрыт, $\delta V = 0$, температура вернулась к T_0: $\delta T_2 = T_0 - T_1 = -\delta T_1$, а давление выросло на $\delta p_2 = p_2 - p_0$. По (1) без слагаемого с объёмом

$$\frac{\delta p_2}{p} = \frac{\delta T_2}{T_0} = -\frac{\delta T_1}{T_0}. \qquad (4)$$

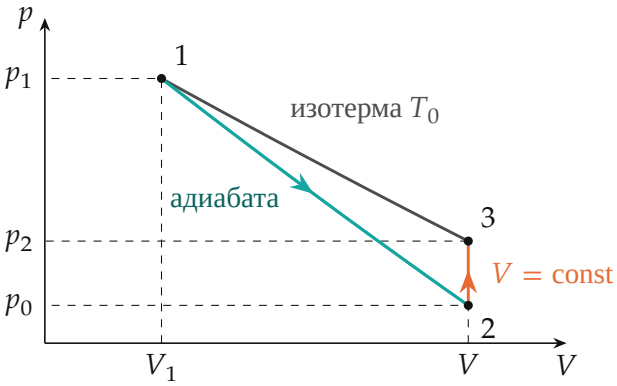
Здесь виден смысл всего опыта: охлаждение при расширении и нагрев при постоянном объёме — одна и та же малая величина $\delta T_1/T_0$, взятая с разными знаками.

4. Собираем. Подставим (3) в (4):

$$\frac{p_2-p_0}{p}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{p_0-p_1}{p}\quad\Rightarrow\quad\frac{\gamma-1}{\gamma}=\frac{p_2-p_0}{p_1-p_0}.$$

Знаменатели p сократились, нам нужны только разности давлений. Отсюда

$$\gamma=\frac{p_1-p_0}{p_1-p_2}=\frac{0{,}060}{0{,}060-0{,}017}=\frac{0{,}060}{0{,}043}\approx 1{,}40.$$



Процесс на плоскости (V,p): $1\to 2$ — адиабата, $2\to 3$ — нагрев при $V=\text{const}$; состояния 1 и 3 лежат на одной изотерме. Оси начинаются не с нуля, масштаб по осям растянут.

Второй способ: без малых величин. Для адиабаты $p_1V_1^{\gamma}=p_0V^{\gamma}$, то есть $V_1/V=(p_0/p_1)^{1/\gamma}$. Состояния 1 и 3 имеют одну температуру T_0 и одно количество газа: $p_1V_1=\nu RT_0=p_2V$, то есть $p_2/p_1=V_1/V$. Приравнивая, $p_2/p_1=(p_0/p_1)^{1/\gamma}$ и

$$\gamma=\frac{\ln(p_0/p_1)}{\ln(p_2/p_1)}=\frac{\ln(1/1{,}060)}{\ln(1{,}017/1{,}060)}=\frac{-0{,}0583}{-0{,}0414}\approx 1{,}41.$$

Этот способ точнее, но требует логарифмов; приём малых величин даёт 1,395 без них, и результаты совпадают с точностью данных: давления заданы тремя значащими цифрами, так что ответ $\gamma\approx 1{,}4$.

Проверка. Знаки: после быстрого расширения газ остыл, $T_1 = T_0\,p_0/p_2 \approx 0{,}983\,T_0$ (на 1,7 %, около 5 К, ниже комнатной), поэтому при нагреве давление выросло: $p_2 > p_0$ — как и в условии; $p_2 < p_1$, потому что часть газа ушла. Предел: $\gamma \to 1$ (изотермический процесс) даёт $p_2 \to p_0$: если температура при расширении не меняется, после закрытия крана давление не растёт. Значение 1,4 соответствует двухатомному газу ($\gamma = (i+2)/i = 7/5$ при $i = 5$), например воздуху.

Ответ. $\gamma \approx 1{,}4$ (по разностям давлений 1,40, по логарифмам 1,41).