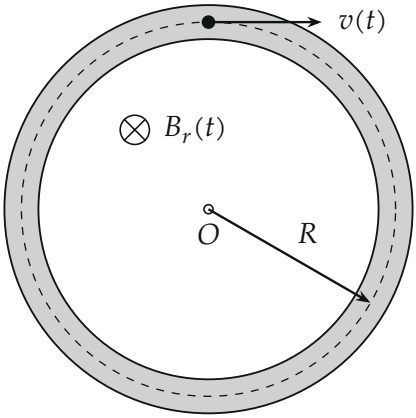
Бетатрон

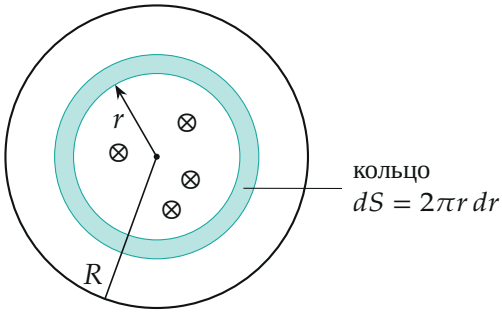
Задача 3. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 3] В ускорителе электронов бетатроне (рис. 2) изменяющееся во времени магнитное поле, индукция которого $B_r(t)$ зависит от расстояния r до оси симметрии O, порождает вихревое электрическое поле, разгоняющее частицы. Мы хотим, чтобы электроны всё время двигались по окружности радиусом R. Определите численное значение отношения $\dfrac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\pi R^2}$ при таком движении. Φ_R — поток магнитного поля через поверхность круга радиусом R. $B_R(t)$ — индукция магнитного поля в момент времени t на расстоянии R от оси симметрии. Считайте, что $\Phi_R(0) = 0$, $v(0) = 0$.



▲ **Решение. Что происходит.** Магнитное поле меняется со временем, поэтому вокруг него возникает вихревое электрическое поле — именно оно разгоняет электрон по орбите. А чтобы электрон при этом не улетал, а шёл по окружности радиусом R, на орбите нужно магнитное поле нужной величины B_R (сила Лоренца искривляет траекторию). Так что у электрона два «хозяина»: электрическое поле отвечает за величину скорости, магнитное — за направление. Приравняв то, что даёт каждое из них, мы свяжем поток Φ_R и индукцию B_R на орбите. Нужно найти отношение $\Phi_R/(B_R\pi R^2)$; оно было бы равно 1 в однородном поле, но здесь поле от r зависит.

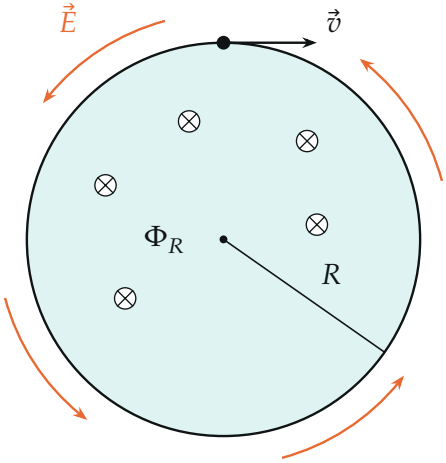
Обозначения. m и e — масса и модуль заряда электрона; E_τ — проекция вихревого электрического поля на направление вдоль орбиты (по касательной), знак у неё пока неизвестен. Поле $\vec{B}$ на рисунке направлено от нас.

1. Почему нельзя написать $\Phi_R = B_R \pi R^2$. Формула «поток равен B на площадь» годится, только если поле одинаково во всех точках площадки. Здесь индукция зависит от расстояния до оси, и закон $B(r)$ нам неизвестен. Единственное, что можно сказать: на тонком кольце радиуса r и ширины dr поле почти постоянно, и его поток $B(r) \cdot 2\pi r\, dr$; суммируя по кольцам до R, получим Φ_R — но для этого нужно знать $B(r)$. Поэтому пойдём другим путём: проследим за движением электрона, а поток оставим потоком.



Поле B зависит от r: круг орбиты разбивают на тонкие кольца, в каждом поле считаем постоянным (⊗ — поле $\vec{B}$ от нас).

2. Какая форма у вихревого электрического поля. Поле $\vec{B}$ симметрично относительно оси O, поэтому и вихревое поле $\vec{E}$ осесимметрично: его линии — окружности с центром на оси, а на окружности радиуса R модуль E один и тот же. Направлено оно по касательной. Следовательно, электрическая сила действует на электрон только вдоль орбиты, и к центру его направляет только магнитная сила.



Круг орбиты, пронизанный полем $\vec{B}$ (от нас), и вихревое поле $\vec{E}$ вокруг него.

3. Удержание на окружности. Запишем второй закон Ньютона вдоль радиуса, к центру. Центростремительное ускорение даёт только сила Лоренца, по модулю evB_R (скорость перпендикулярна полю):

$$m\frac{v^2}{R} = e\,v\,B_R \quad \Rightarrow \quad mv = e\,B_R\,R. \tag{1}$$

Здесь индукция — та, что в точках орбиты, B_R, а не среднее поле внутри. Электрон заряжен отрицательно; чтобы сила Лоренца была направлена к центру при поле $\vec{B}$ от нас, электрон должен вращаться *по часовой стрелке*.

4. Закон индукции: откуда минус и как выбрать знаки. Выберем в качестве контура саму орбиту и направим обход по часовой стрелке — так, чтобы по правилу буравчика нормаль к площадке совпала с направлением поля $\vec{B}$. Тогда поток Φ_R через круг положителен (нам нужно именно его значение, а не со знаком). Циркуляция электрического поля по контуру — это сумма $E_\tau\,\Delta l$ по всем кусочкам контура; по симметрии E_τ на всей окружности одинакова, и циркуляция равна $E_\tau \cdot 2\pi R$. Закон Фарадея:

$$E_\tau \cdot 2\pi R = -\frac{d\Phi_R}{dt}.$$

Минус — это правило Ленца: если поток через контур (при выбранной

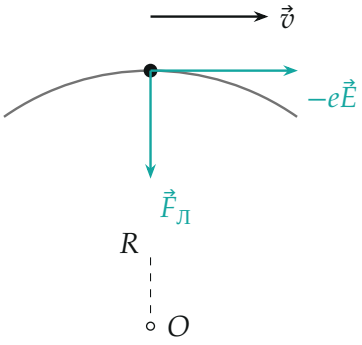
нормали) растёт, вихревое поле направлено против обхода, то есть создаёт то, что мешает росту. Знак самого E_τ мы не знаем, потому что не знаем, растёт ли поле, — и не нужно: он сам выйдет из формул.

5. Разгон электрона. На электрон вдоль обхода (то есть вдоль скорости: он идёт по часовой) действует единственная касательная сила, электрическая, $-eE_\tau$: заряд отрицательный. Второй закон Ньютона в проекции на касательную:

$$m\frac{dv}{dt} = -eE_\tau = \frac{e}{2\pi R}\frac{d\Phi_R}{dt}.$$

Заметим: скорость от нуля растёт, $dv/dt > 0$, значит $d\Phi_R/dt > 0$: поток растёт, $E_\tau < 0$, то есть поле направлено против часовой, как и должно быть по Ленцу. Теперь сложим приращения от начала разгона до момента t. Электрон всё время на окружности радиуса R, так что R постоянно, и можно просуммировать обе части: левую — от 0 до v, правую — от 0 до Φ_R (в начале $v(0) = 0$, $\Phi_R(0) = 0$):

$$mv = \frac{e}{2\pi R}\Phi_R. \qquad (2)$$

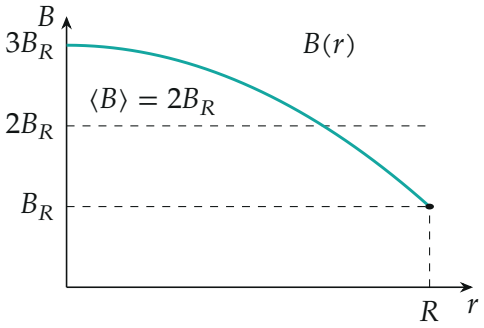


Силы, действующие на электрон на орбите: касательная $-e\vec{E}$ разгоняет, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ направлена к центру.

6. Сравниваем. В (1) и (2) стоит одна и та же величина mv, поэтому

$$\frac{e}{2\pi R}\,\Phi_R = e\,B_R\,R \quad\Rightarrow\quad \Phi_R = 2\pi R^2 B_R, \qquad \frac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\,\pi R^2} = 2.$$

Отношение 2 не зависит ни от времени, ни от профиля $B(r)$. В обеих формулах mv — импульс электрона; при скоростях, близких к скорости света, его нужно заменить релятивистским импульсом p, ответ 2 не изменится.



Пример профиля $B(r) = B(0)(1 - \frac{2}{3}r^2/R^2)$: у него среднее по кругу поле вдвое больше, чем на границе.

Проверка. Размерность: Φ_R в Тл·м^2, $B_R\pi R^2$ — то же, отношение безразмерно. Физический смысл: среднее поле внутри орбиты $\langle B\rangle = \Phi_R/(\pi R^2)$ должно быть вдвое больше поля на самой орбите, то есть $B(r)$ спадает к краю — как на рисунке. Предельный случай: если бы поле было однородным ($\Phi_R = B\pi R^2$, отношение 1), из (2) получилось бы $mv = eBR/2$, и по (1) электрон вращался бы по окружности радиусом $R/2$, а не R. Это и есть причина, по которой в бетатроне поле на орбите делают вдвое слабее среднего. Знак: поток растёт, электрон разгоняется по часовой стрелке — всё согласовано с правилом Ленца.

Ответ. $\dfrac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\,\pi R^2} = 2.$