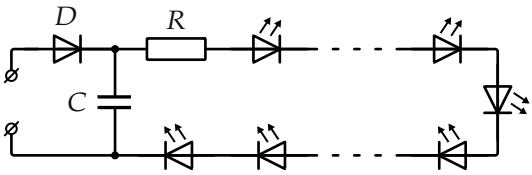
Подобрать детали

Задача 4. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 4] По схеме, показанной на рис. 3, решили изготовить светодиодный светильник, работающий от сети переменного напряжения ($\nu = 50$ Гц, $U = 230$ В, $U_{max} = 325$ В). Диод D можно считать идеальным. Всего используется 60 одинаковых светодиодов. Вольт-амперная характеристика одного светодиода показана на рис. 4. Ток через светодиод не должен превышать 20 мА. Имеются резисторы и конденсаторы с номиналами, указанными в таблице. W — максимально допустимая мощность, выделяющаяся в резисторе, при работе в штатном режиме. U — максимальное напряжение, которое выдерживает конденсатор без повреждения.

№	R, кОм; W, Вт	C, мкФ; U, В
1	0,91; 5	0,1; 450
2	1,2; 5	100; 250
3	7,5; 2	20; 350
4	4,7; 5	15; 350
5	6,8; 1	4,7; 300
6	8,2; 5	10; 350
7	75; 2	6,8; 300



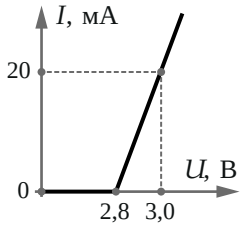


Рис. 3. Схема светильника. *Рис. 4. Вольт-амперная характеристика светодиода.*

Желательно, чтобы при работе светильника максимальное отклонение тока через светодиод от среднего значения составляло не более 5%, при этом световой поток был бы максимальным. Выберите подходящие

резистор и конденсатор из указанных в таблице. Если подходящих элементов несколько — укажите номера всех.

▲ **Решение. Что происходит.** Диод D пропускает ток только в одну сторону, поэтому конденсатор C подзаряжается лишь вблизи гребней сетевого напряжения, до амплитуды $U_{\max} = 325$ В, а остальную часть периода разряжается через резистор и цепочку светодиодов. Это схема-выпрямитель со сглаживанием, а задача — на перебор состояний диода: светодиод закрыт, пока напряжение на нём ниже 2,8 В, а открытый ведёт себя как «батарейка плюс резистор». Резистор выбираем по предельному току и мощности, конденсатор — по допустимому напряжению и пульсациям тока.

Обозначения. u_C — напряжение на конденсаторе, I — ток в цепочке (он же ток каждого светодиода), $T = 1/\nu = 20$ мс — период сети.

1. Откуда постоянный ток. Сеть даёт переменное напряжение, которое полпериода даже отрицательно, а светодиоды должны светить ровно. Почему ток через них получается почти постоянным? Разберёмся, как ведёт себя напряжение u_C на конденсаторе. Гирлянду вместе с резистором пока заменим просто *нагрузкой*, включённой параллельно конденсатору: через неё течёт ток $I > 0$, пока u_C велико, и конденсатор, отдавая этот ток, разряжается.

Диод — нелинейный элемент, поэтому пользуемся методом предположений: у идеального диода два состояния, и в каждый момент верно ровно одно.

- *Диод открыт*: он — просто провод, напряжение на нём ноль, ток через него идёт только в прямом направлении ($i_D \geq 0$). Тогда конденсатор подключён прямо к сети, и u_C равно напряжению сети $u(t) = U_{\max} \sin \omega t$.
- *Диод закрыт*: тока нет ($i_D = 0$), а напряжение на нём в прямом направлении отрицательно: $u(t) - u_C < 0$. Конденсатор отрезан от сети и разряжается через нагрузку.

Предположение верно, пока не нарушено его условие; нарушилось — переходим в другое состояние.

Включили сеть, напряжение растёт. Открытый диод заряжает конденсатор вслед за сетью: $u_C = u(t)$. Ток диода равен току зарядки плюс

ток нагрузки, $i_D = C\,du/dt + I > 0$ — предположение согласовано.

После максимума. Сеть начинает падать, $du/dt = U_{\max}\omega\cos\omega t < 0$. Если бы диод оставался открытым, u_C падало бы так же быстро, как сеть. Но сам по себе конденсатор, отдавая ток нагрузке, может разряжаться лишь со скоростью

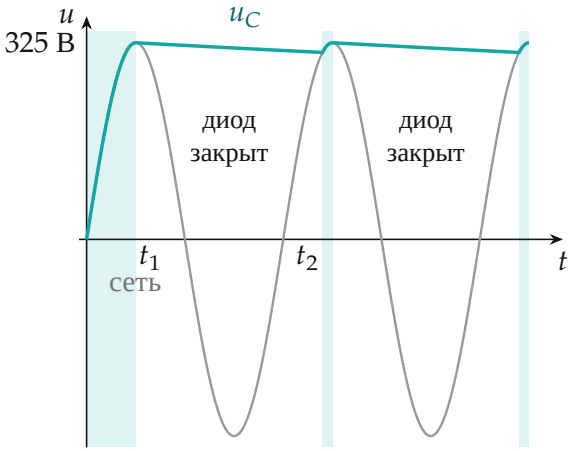
$$\left|\frac{du_C}{dt}\right| = \frac{I}{C} \approx \frac{0{,}018\ \text{А}}{20\cdot 10^{-6}\ \text{Ф}} \approx 900\ \text{В/с},$$

а сеть вскоре после гребня падает со скоростью вплоть до $U_{\max}\omega = 325\cdot 314 \approx 10^5$ В/с — в сто с лишним раз быстрее. Чтобы u_C поспевало за сетью, диод должен был бы гнать ток назад: $i_D = C\,du/dt + I < 0$, как только $U_{\max}\omega|\cos\omega t| > I/C$. Это запрещено, значит диод закрывается — практически сразу за гребнем, в момент t_1, где $\cos\omega t_1 = -I/(CU_{\max}\omega) \approx -0{,}009$ (на 0,03 мс позже максимума).

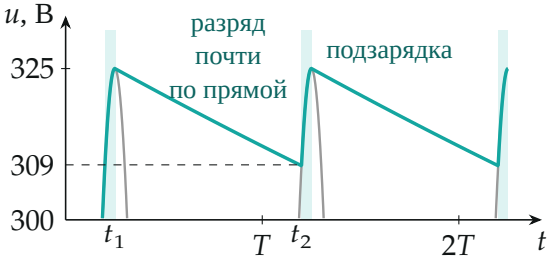
Диод закрыт. Сеть уходит вниз, через ноль в минус и обратно, а конденсатор медленно разряжается через нагрузку. Мы увидим (п. 5), что это экспонента с постоянной времени $\tau \approx 0{,}18$ с, много больше периода $T = 20$ мс, поэтому за период идёт лишь её самое начало — почти прямая: u_C падает примерно на $IT/C \approx 16$ В. Условие «закрыт» $u(t) < u_C$ выполняется, пока синусоида снова не поднимется до u_C.

Сеть догнала конденсатор. В момент t_2, когда $u(t_2) = u_C(t_2) \approx 309$ В (около 1 мс до следующего гребня), напряжение на диоде становится нулём, и дальше сеть растёт быстрее, чем падало бы u_C, — диод открывается, и конденсатор снова идёт вместе с сетью, подзаряжаясь до 325 В. Дальше всё повторяется каждый период.

Получается «пила» (рисунки ниже): короткая подзарядка у гребня (около 1 мс из 20) и почти линейный спад до следующего гребня. Напряжение на конденсаторе колеблется лишь между $\approx$ 309 и 325 В, и ток нагрузки почти постоянный — конденсатор работает как резервуар, который сеть быстро доливает раз в период. Насколько ровным будет ток, решают R и C — их и выбираем ниже.



Сеть (серое) и u_C (бирюзовое) после включения, $C = 20$ мкФ, $R = 8{,}2$ кОм; закрашено — диод открыт.



То же вблизи гребня (ось напряжений начинается с 300 В): «пила» u_C с размахом около 16 В.

2. Модель светодиода. По графику до 2,8 В тока нет, выше — прямая, проходящая через точки (2,8 В; 0) и (3,0 В; 20 мА). Её наклон (рис. 4): $r = 0{,}2$ В/20 мА $= 10$ Ом. Значит, открытый светодиод заменяем на «батарейку» $U_0 = 2{,}8$ В, включённую против тока, и резистор $r = 10$ Ом. Шестьдесят одинаковых светодиодов подряд — это $60U_0 = 168$ В и $60r = 600$ Ом. Ток идёт, пока $u_C > 168$ В:

$$I = \frac{u_C - 168\text{ В}}{R + 600\text{ Ом}}. \qquad (1)$$

3. Допустимое напряжение конденсатора. Идеальный диод заряжает конденсатор до амплитуды, поэтому конденсатор должен выдерживать не меньше 325 В. Конденсаторы №2 (250 В), №5 и №7 (300 В) пробьются, остаются №1, №3, №4 и №6.

4. Резистор: ток и мощность. Ток больше всего сразу после подзарядки, когда $u_C = U_{\max}$. По (1) и условию $I_{\max} \le 20$ мА:

$$I_{\max} = \frac{325 - 168}{R + 600} \le 0{,}020 \text{ А} \quad \Rightarrow \quad R \ge \frac{157}{0{,}020} - 600 = 7250 \text{ Ом}.$$

Световой поток наибольший, когда ток как можно ближе к предельному, то есть R чуть больше 7,25 кОм. Мощность в штатном режиме $P \approx I^2 R$ (ток почти постоянный); $I_{\max}$ в таблице — по формуле выше. Переберём резисторы:

№	R, кОм	$I_{\max}$, мА	P, Вт	W, Вт	вывод
1	0,91	104	10	5	$I > 20$ мА
2	1,2	87	9	5	$I > 20$ мА
3	7,5	19,4	2,3–2,6	2	$P > W$
4	4,7	29,6	4	5	$I > 20$ мА
5	6,8	21,2	2,4–2,8	1	$I > 20$, $P > W$
6	8,2	17,8	2,1–2,4	5	подходит
7	75	2,1	0,3	2	слабый свет

У №3 мощность выходит за норму при любой ёмкости из таблицы: ток не опускается ниже 17 мА, и $P \ge (0{,}017)^2 \cdot 7500 \approx 2{,}2$ Вт > 2 Вт. Подходит резистор №6 (8,2 кОм).

5. Конденсатор: пульсации тока. Между подзарядками диод закрыт, и конденсатор разряжается только через резистор и светодиоды. Обозначим $u' = u_C - 168$ В; по (1) $I = u'/(R + 600)$, и закон сохранения заряда для конденсатора даёт

$$C\frac{du'}{dt} = -\frac{u'}{R + 600} \quad \Rightarrow \quad u'(t) = u'_0\, e^{-t/\tau}, \quad \tau = C\,(R + 600),$$

значит и ток $I(t) = I_{\max} e^{-t/\tau}$. Подзарядка бывает раз за период (диод

пропускает одну полуволну), так что за время почти $T = 20$ мс ток падает от $I_{\max}$ до $I_{\max}e^{-T/\tau} \approx I_{\max}(1 - T/\tau)$, потому что $T \ll \tau$. Размах пульсаций равен T/τ, а отклонение от среднего в каждую сторону — примерно половине размаха. Условие «не более 5 %» даёт

$$\frac{T}{\tau} \le 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad C \ge \frac{T}{0{,}1\,(R + 600)} = \frac{0{,}02\text{ с}}{0{,}1 \cdot 8800\text{ Ом}} \approx 23\text{ мкФ}.$$

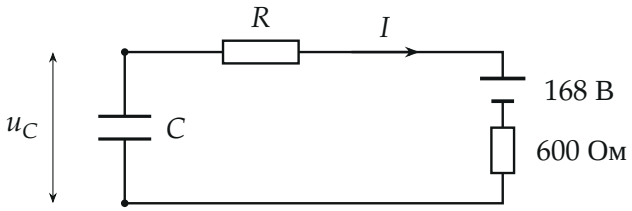
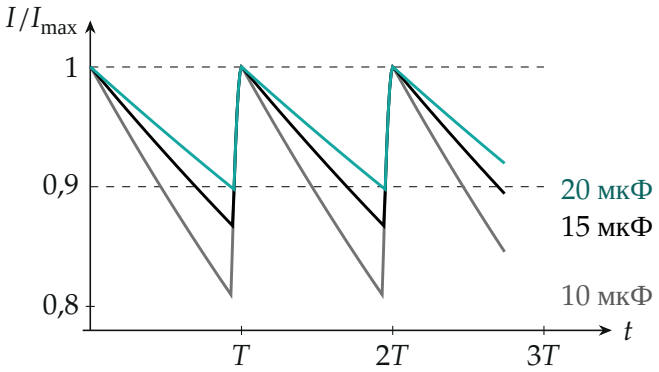


Схема разряда конденсатора: резистор R и цепочка из 60 светодиодов, заменённая батарейкой 168 В и резистором 600 Ом.

Для $R = 8{,}2$ кОм ($R + 600 = 8800$ Ом) и конденсаторов из оставшихся:

№	C, мкФ	T/τ	отклонение	вывод
1	0,1	23	≈ 100 %	не сглаживает
3	20	0,11	$\pm 5{,}4$ %	лучший
4	15	0,15	± 7 %	хуже
6	10	0,23	± 10 %	хуже



Ток светодиодов в долях максимального за три периода (расчёт по модели) для трёх конденсаторов; штриховая линия $0{,}9\,I_{\max}$ *— граница размаха* 10 %, *то есть* ± 5 %.

Обратите внимание: ток пропорционален $u_C - 168$ В, а не u_C. Пять процентов тока — это $\pm 0{,}05 \cdot 157 \approx \pm 8$ В на конденсаторе, а не ± 5 % от 325 В (± 16 В). Именно здесь расходится ключ организаторов: их оценка $C \approx$ 9–11 мкФ получается, если потребовать ± 5 % от *напряжения* конденсатора, $IT/C \le 0{,}1\,U_{\max}$, то есть $C \ge 17{,}8$ мА $\cdot$ 20 мс$/32{,}5$ В ≈ 11 мкФ, — как будто нагрузка — просто резистор без порога 168 В. По модели напряжение отклоняется на $\pm 4{,}8$, $\pm 3{,}3$ и $\pm 2{,}5$ % (10, 15, 20 мкФ) — все три «проходят».

6. Выбор. Резистор — №6 (8,2 кОм, 5 Вт). Конденсатор: строго по условию (ток в пределах ± 5 %) нужна ёмкость $C \gtrsim 23$ мкФ, а среди выдерживающих 325 В самый большой — №3 (20 мкФ, 350 В), он даёт $\pm 5{,}4$ %, почти в норме; это лучший выбор. Конденсаторы №4 (15 мкФ) и №6 (10 мкФ) укладываются в 5 % только по напряжению на конденсаторе (так считали организаторы); по току у них ± 7 % и ± 10 %.

Проверка. Второй способ для $C = 20$ мкФ: за период из конденсатора уходит заряд $IT \approx 17{,}8$ мА $\cdot$ 20 мс $= 0{,}36$ мКл, напряжение падает на $\Delta u = IT/C \approx 17{,}8$ В, а ток — на $\Delta u/(R + 600) \approx 2{,}0$ мА, то есть на 11 % — как и $T/\tau \approx 0{,}11$. Пределы: $C \to \infty$ — ток постоянный, 17,8 мА; $C \to 0$ — светодиоды горят только на гребнях. Средний ток 16,9 мА — 85 % от предельных 20 мА.

Ответ. Резистор №6 (8,2 кОм, 5 Вт); конденсатор №3 (20 мкФ) — лучший: отклонение тока $\pm 5{,}4$ %, строго ± 5 % требует $C \gtrsim 23$ мкФ, такого с допустимым напряжением в таблице нет. Организаторы допускают ещё №4 (15 мкФ) и №6 (10 мкФ): у них в пределах ± 5 % напряжение конденсатора, но ток отклоняется на ± 7 % и ± 10 %.