Парус как крыло

Задача 5. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 5] Динамика буера (ледовой яхты, рис. 5) может быть описана на основе модели, в которой парус считается вертикально расположенным крылом. Силу $\vec{F}$, действующую на парус со стороны воздуха (см. рис. 6, вид сверху), принято раскладывать на две составляющие: $\vec{D}$, направленную вдоль скорости $\vec{w}$ потока воздуха относительно буера, и $\vec{L}$, перпендикулярную $\vec{D}$. Можно считать, что $D = C_D\dfrac{\rho w^2}{2}S$, $L = C_L\dfrac{\rho w^2}{2}S$, где S — площадь паруса, ρ — плотность воздуха; безразмерные коэффициенты C_D и C_L зависят только от ориентации паруса относительно набегающего потока воздуха. Взаимодействие с горизонтальной поверхностью снега (или льда) характеризуется силами $\vec{T}$ (трения) и горизонтальной реакции $\vec{N}$. Далее везде трением мы пренебрегаем. Угол между скоростью буера $\vec{v}$ и скоростью ветра относительно земли $\vec{u}$ обозначим θ.



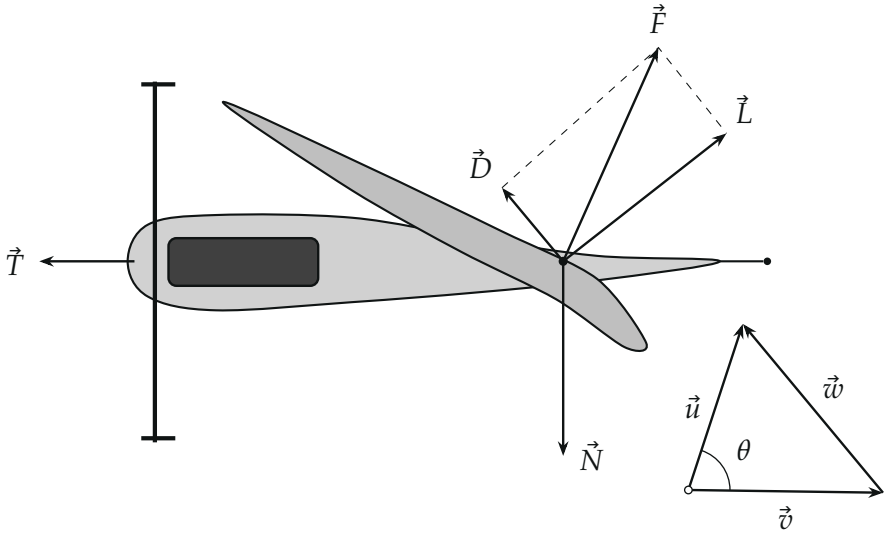


Рис. 5. Буер. *Рис. 6. Силы на парус, вид сверху, и треугольник скоростей.*

1. Пусть известно, что буер движется с постоянной скоростью. Отношение $\dfrac{C_L}{C_D} = k$ задано. Кроме того даны скорость ветра u и угол θ. Определите скорость буера v. Если параметр k и скорость ветра u остаются постоянными, а угол θ может изменяться от $0°$ до $90°$, то чему равна максимально возможная скорость буера v в рамках данной модели?
2. На рис. 7 показана кривая, координаты точек которой равны значениям коэффициентов C_D и C_L для разных положений паруса относительно набегающего потока воздуха. Определите максимально возможное ускорение буера при старте из положения покоя. Скорость ветра $u = 10$ м/с, масса буера и человека 100 кг, площадь паруса 7 м^2, атмосферное давление нормальное, температура воздуха $-10°$ С.

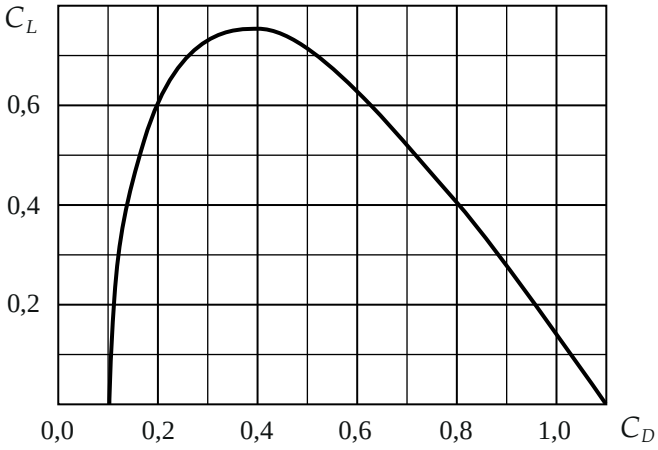


Рис. 7

3. Используя кривую, показанную на рис. 7, определите при каких значениях угла θ возможно движение буера с постоянной скоростью.

▲ **Решение. Что происходит.** Буер — это парус-крыло на полозьях. Ветер, набегая на парус, давит на него силой $\vec{F}$, а лёд не пускает буер поперёк полозьев: реакция $\vec{N}$ направлена перпендикулярно им (трения нет). Двигает буер только составляющая $\vec{F}$ вдоль полозьев, поперечную гасит лёд. Величина силы воздуха зависит от того, с какой скоростью воздух набегает *на парус*, то есть относительно буера: если буер сам едет со скоростью $\vec{v}$, а ветер дует со скоростью $\vec{u}$ относительно земли, то в системе отсчёта буера воздух движется со скоростью

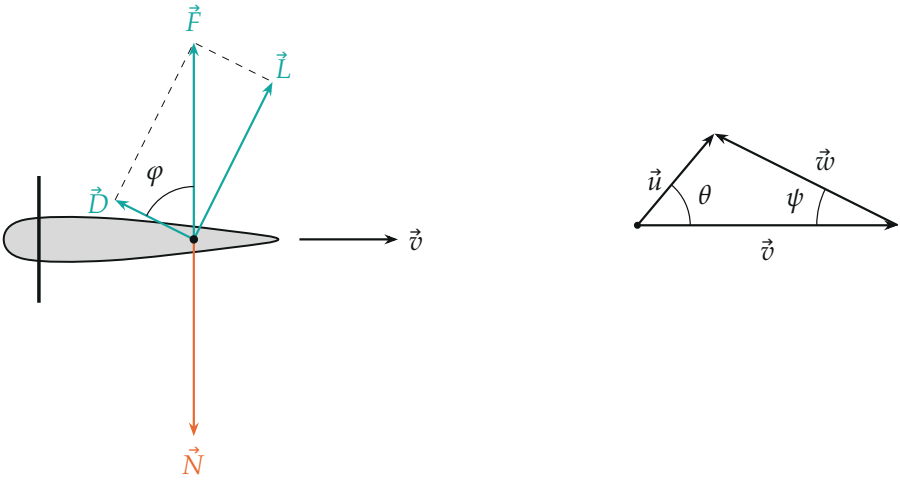
$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Именно вдоль этой скорости направлена сила $\vec{D}$, а $\vec{L}$ перпендикулярна ей, и обе пропорциональны $\rho w^2 S/2$. Всё остальное — геометрия векторов.

Обозначения. Ось x — вдоль $\vec{v}$ (вдоль полозьев), ось y — перпендикулярно ей, вид сверху. φ — угол между $\vec{F}$ и $\vec{D}$, ψ — угол между $\vec{w}$ и $-\vec{v}$.

Пункт 1.

1. Условие постоянной скорости. Скорость постоянна — сумма сил равна нулю, в том числе по оси x. $\vec{N} \perp \vec{v}$ проекции на x не даёт, значит, нет её и у $\vec{F}$: $\vec{F} \perp \vec{v}$, а $\vec{N}$ уравновешивает её, $N = F$.



Слева: силы на парус при постоянной скорости ($k = 2$, $\theta = 50°$), $\vec{F} \perp \vec{v}$. Справа: треугольник скоростей $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$; $\tan\psi = 1/k$.

2. Что отсюда для угла паруса. $\vec{F} = \vec{D} + \vec{L}$, $\vec{L} \perp \vec{D}$, значит $\tan\varphi = L/D = C_L/C_D = k$: общий множитель $\rho w^2 S/2$ сокращается — вот почему задано именно отношение k. Проекции $\vec{D}$ и $\vec{L}$ на ось x должны компенсировать друг друга; вектор $\vec{D}$ идёт вдоль $\vec{w}$ и составляет с осью x угол ψ. Тогда $D\cos\psi = L\sin\psi$, то есть

$$\cot\psi = \frac{L}{D} = k.$$

Итог: угол ψ задан числом k и от θ не зависит; при заданном k меняется только θ.

3. Скорость буера: треугольник скоростей. Векторы $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ образуют треугольник. Угол между $\vec{v}$ и $\vec{u}$ — это θ, угол между $\vec{w}$ и $-\vec{v}$ — ψ, третий угол равен $180° - \theta - \psi$. Теорема синусов: сторона v лежит

против угла $180^\circ - \theta - \psi$, сторона u — против ψ:

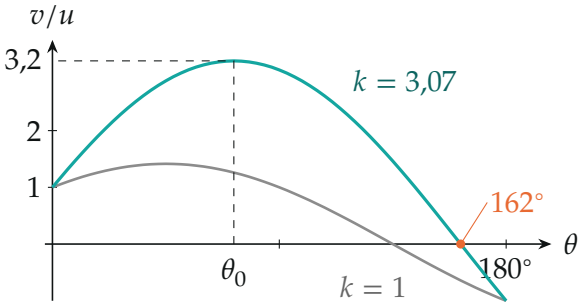
$$\frac{v}{\sin(\theta+\psi)} = \frac{u}{\sin\psi} \;\Rightarrow\; v = u\,\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin\psi} = u\,(\cos\theta + k\sin\theta)$$

(раскрыли синус суммы и подставили $\cot\psi = k$).

4. Наибольшая скорость. В формуле $v = u\sin(\theta+\psi)/\sin\psi$ величины u и ψ заданы, меняется только θ, причём меняется только числитель $\sin(\theta+\psi)$, не больше 1. Максимум достигается при $\theta+\psi = 90^\circ$ — когда $\vec{w} \perp \vec{u}$ (в центре рисунка в пункте 9). Тогда $\theta = 90^\circ - \psi$ лежит между 0° и 90° — допустимое значение, и

$$v_{\max} = \frac{u}{\sin\psi} = u\sqrt{1+\cot^2\psi} = u\sqrt{k^2+1}.$$

Второй способ — через вспомогательный угол: $v/u = \sqrt{k^2+1}\,\cos(\theta - \theta_0)$, где $\tan\theta_0 = k$, и максимум тот же.



Скорость буера $v/u = \cos\theta + k\sin\theta$ (пункт 3, по точкам): максимум $\sqrt{k^2+1}$ при $\tan\theta_0 = k$; при $k_{\max} = 3{,}07$ скорость обращается в нуль при $\theta \approx 162^\circ$.

Пункт 2.

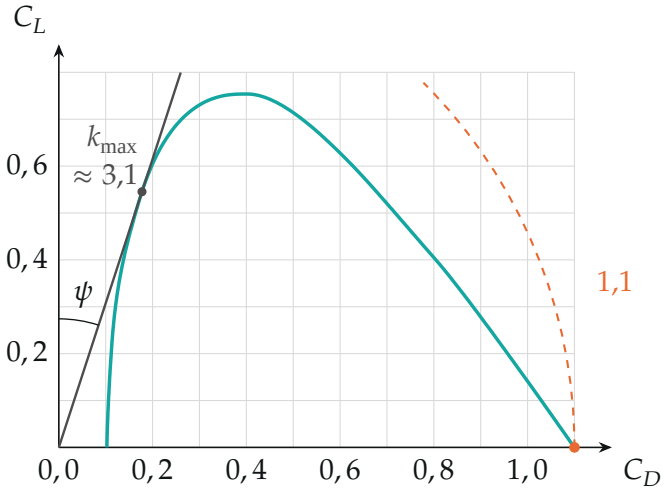
5. Старт с места: что меняется. При $v = 0$ буер стоит, $\vec{w} = \vec{u} - \vec{0} = \vec{u}$: воздух набегает со скоростью u, и сила $F = \frac{1}{2}\rho u^2 S\sqrt{C_D^2 + C_L^2}$, где корень — расстояние от начала координат до точки кривой рис. 7. Ускорение вдоль полозьев даёт составляющая $\vec{F}$ на ось x: если полозья направить

под углом θ к ветру, то

$$ma = \frac{\rho u^2 S}{2}\,(C_D\cos\theta + C_L\sin\theta) = \frac{\rho u^2 S}{2}\sqrt{C_D^2 + C_L^2}\,\sin(\theta+\chi),$$

где $\tan\chi = C_D/C_L$ (вспомогательный угол). Синус не больше единицы, поэтому лучше всего направить буер вдоль силы $\vec{F}$ целиком: $a_{\max} = F/m$.

6. Самая дальняя точка кривой. Посчитаем $\sqrt{C_D^2 + C_L^2}$ для нескольких точек кривой: $(0{,}2;\ 0{,}60) \to 0{,}63$; $(0{,}4;\ 0{,}75) \to 0{,}85$; $(0{,}6;\ 0{,}63) \to 0{,}87$; $(0{,}8;\ 0{,}41) \to 0{,}90$; $(0{,}95;\ 0{,}21) \to 0{,}97$; правый конец $(1{,}1;\ 0) \to 1{,}10$. Расстояние растёт к правому концу; строго: дуга радиусом 1,1 с центром в начале координат касается кривой только в правом конце, остальные точки лежат ближе. Значит, наибольшее $\sqrt{C_D^2 + C_L^2}$ равно 1,1 (парус поперёк потока, $C_L = 0$: буер трогается по ветру).



Кривая рис. 7. Красная дуга радиуса 1,1 касается кривой только в точке $(1{,}1;\ 0)$ (пункт 2); серая прямая из начала координат — касательная с наибольшим наклоном $k_{\max}$ (пункт 3).

7. Число. Плотность воздуха — из уравнения состояния (давление нормальное, $T = 263$ К, $M = 0{,}029$ кг/моль): $\rho = pM/(RT) = 1{,}01\cdot$

$10^5 \cdot 0{,}029/(8{,}31 \cdot 263) \approx 1{,}34$ кг/м^3. Тогда

$$a_{\max} = \frac{1{,}1\,\rho u^2 S}{2m} = \frac{1{,}1 \cdot 1{,}34 \cdot 10^2 \cdot 7}{2 \cdot 100} \approx 5 \text{ м/с}^2.$$

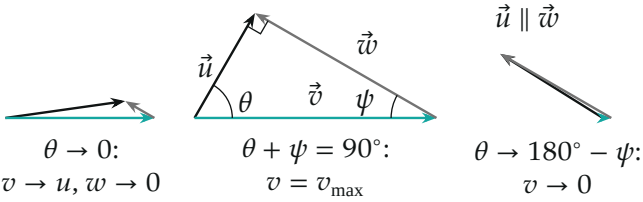
Пункт 3.

8. От чего зависит допустимое θ. По пункту 3 скорость $v = u\sin(\theta+\psi)/\sin\psi$, а $\cot\psi = k = C_L/C_D$ — наклон прямой из начала координат к выбранной точке кривой. Наименьший наклон $k = 0$ (точка на оси C_D) даёт $\psi = 90°$. Наибольший — у касательной из начала координат, касание в точке $(0{,}18;\ 0{,}55)$ (рисунок выше): $k_{\max} \approx 0{,}55/0{,}18 \approx 3{,}1$, $\psi_{\min} = \operatorname{arccot} k_{\max} \approx 18°$. Итак, ψ меняется от 18° до 90°.

9. Границы по θ. Треугольники скоростей для крайних случаев — на рисунке. θ и ψ — два угла треугольника, поэтому $\theta+\psi < 180°$; это то же, что $v > 0$ в формуле. При $\theta \to 0$ буер идёт по ветру со скоростью ветра, $\vec{w} = 0$, силы на парус нет — $\theta = 0°$ не входит. Сверху $\theta < 180° - \psi$, и чем меньше ψ, тем больше допустимый угол:

$$\theta < 180° - \psi_{\min} \approx 162°.$$

При таком θ скорость $v \to 0$, а $\vec{u} \parallel \vec{w}$ (правый треугольник).



Треугольник скоростей $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ при разных θ (рисунок для $\psi = 30°$): скорость буера $\vec{v}$ — бирюзовая, ветер относительно буера $\vec{w}$ — серая.

Итак, $0° < \theta < 162° \pm 2°$: θ может быть *больше* 90° — буер идёт навстречу ветру за счёт подъёмной силы паруса.

Проверка. Размерность: $\rho u^2 S/m$ — м/с^2. Пределы пункта 1: $\theta = 0$ даёт $v = u$; $k \to 0$ ($\psi = 90°$) даёт $v = u\cos\theta$ — проекция ветра на направление движения, $\vec{w} \perp \vec{v}$. Через проекции: $w_x = u\cos\theta - v$, $w_y = u\sin\theta$ и $w_x = -k\,w_y$ дают снова $v = u(\cos\theta + k\sin\theta)$.

Ответ. 1) $v = u(\cos\theta + k\sin\theta)$, $v_{\max} = u\sqrt{k^2+1}$; 2) $a_{\max} = 1{,}1\,\dfrac{\rho u^2 S}{2m} \approx 5$ м/с^2; 3) $0^\circ < \theta < 162^\circ \pm 2^\circ$.