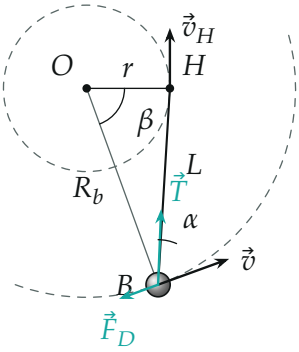
Шарик на ниточке

Задача 6. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 6] Человек раскручивает в вертикальной плоскости полиуретановый шарик, закреплённый на одном конце тонкой, но прочной, нерастяжимой нитки, держась за петельку на другом её конце. Когда скорость шарика становится достаточно большой и почти перестаёт изменяться, точка, в которой человек держит петлю, движется по окружности радиусом r. Определите минимально возможное значение r, если длина нитки между петлёй и шариком равна $L = 1$ м, а радиус шарика равен 1 см. Плотность полиуретана равна $\rho = 1200$ кг/м^3. Сила сопротивления воздуха даётся соотношением $F_D = \dfrac{\rho_0 v^2}{4} S$, где ρ_0 — плотность воздуха, S — площадь поперечного сечения шара, v — его скорость. Молярная масса воздуха равна $\mu = 29$ г/моль. Воздух находится при нормальных условиях. Можно считать, что $v \gg \sqrt{gL}$. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.



Вид сверху. Рука H идёт по малой окружности радиуса r, шарик B — по большой радиуса R_b, оба вокруг неподвижной точки O. Рисунок не в масштабе: на самом деле $r \ll L$ и угол α мал.

▲ **Решение. Что происходит.** Человек стоит на месте и водит рукой по маленькому кругу вокруг точки O; шарик на нитке длиной L описывает вокруг той же точки большой круг. Чтобы понять, чем определяется радиус руки, спросим себя: что мешает нитке просто идти вдоль радиуса, от руки через центр к шарику? Воздух. Он всё время тормозит шарик,

а скорость нужно держать постоянной. Единственная сила, способная его подталкивать вперёд, — натяжение нитки. Значит, нитка обязана быть чуть наклонена *вперёд* относительно радиуса, чтобы у натяжения появилась составляющая вдоль скорости. А наклон нитки задаёт рука: чем дальше она от центра, тем больше нитка может отклониться от радиуса. Отсюда и ограничение на r снизу, которое надо найти. Модель: шарик — материальная точка, нитка невесома и нерастяжима, всё установилось, вращение равномерное.

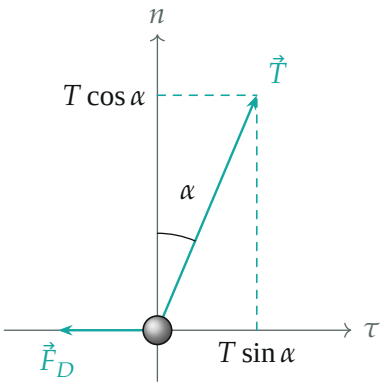
Сначала про силу тяжести. Если отпустить шарик с высоты L, он наберёт скорость порядка $\sqrt{2gL}$, а у нас скорость намного больше. Значит, натяжение $T \sim mv^2/L$ намного больше mg: шарик движется почти в одной плоскости, и ту малую составляющую натяжения, которая направлена вверх, мы вправе считать уравновешивающей mg. Для движения в плоскости сила тяжести ничего не меняет, и рассматриваем только силы в этой плоскости.

Обозначения. H — рука (петля), B — шарик, $R_b = OB$ — радиус его окружности, α — угол между ниткой и радиусом BO, β — угол HOB между направлениями на руку и на шарик (рука опережает шарик на β), T — натяжение, m — масса шарика, R_0 — его радиус, $S = \pi R_0^2$.

1. Куда направлена скорость и откуда R_b. Точка O неподвижна, а установившееся движение — вращение с одной угловой скоростью ω всей конструкции O–H–B как твёрдого тела: треугольник OHB не меняет формы, угол β постоянен. Поэтому шарик движется по окружности с центром O, скорость $\vec{v} \perp OB$, радиус кривизны траектории равен R_b. Значит, центростремительное ускорение равно v^2/R_b и направлено к O.

2. Силы и уравнения. На шарик в плоскости движения действуют натяжение $\vec{T}$ вдоль нитки (к руке) и сила сопротивления $\vec{F}_D$ против скорости. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекциях на радиус BO и на направление скорости; скорость по модулю не меняется, поэтому тангенциальное ускорение равно нулю:

$$T\cos\alpha = \frac{mv^2}{R_b}, \qquad T\sin\alpha - F_D = 0.$$



Силы на шарик: τ — по скорости, n — к центру. Продольная составляющая натяжения уравновешивает сопротивление.

Угол α мал. Заранее ясно почему: нитка выходит из точки на малой окружности радиуса $r \ll L$, так что от радиуса её отклонение порядка r/L (проверим это формулой ниже и ответом). Поэтому $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$ и

$$T \approx \frac{mv^2}{R_b}, \qquad \alpha = \frac{F_D}{T} = \frac{F_D R_b}{mv^2}.$$

Подставляем $F_D = \dfrac{\rho_0 v^2}{4}\pi R_0^2$ и $m = \dfrac{4}{3}\pi R_0^3 \rho$. Скорость сократилась — это важно: ответ не зависит от того, как быстро раскручен шарик.

$$\alpha = kR_b, \qquad k = \frac{3\rho_0}{16\rho R_0}.$$

3. Плотность воздуха. Для нормальных условий ($p = 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К) из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$\rho_0 = \frac{p\mu}{RT_0} = \frac{10^5 \cdot 0{,}029}{8{,}31 \cdot 273} \approx 1{,}28 \text{ кг/м}^3,$$

$$k = \frac{3 \cdot 1{,}28}{16 \cdot 1200 \cdot 0{,}01} \text{ м}^{-1} \approx 0{,}020 \text{ м}^{-1}.$$

При $R_b \approx 1$ м получается $\alpha \approx 0{,}02$ рад, около 1°: нитка почти радиальна, как и предполагали.

4. Связь с радиусом руки. У нас два выражения для малого угла α: из динамики $\alpha = kR_b$, из геометрии — из теоремы синусов для треугольника OHB. Сторона $OH = r$ лежит против угла α, сторона $HB = L$ — против угла β:

$$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \frac{r\sin\beta}{L}.$$

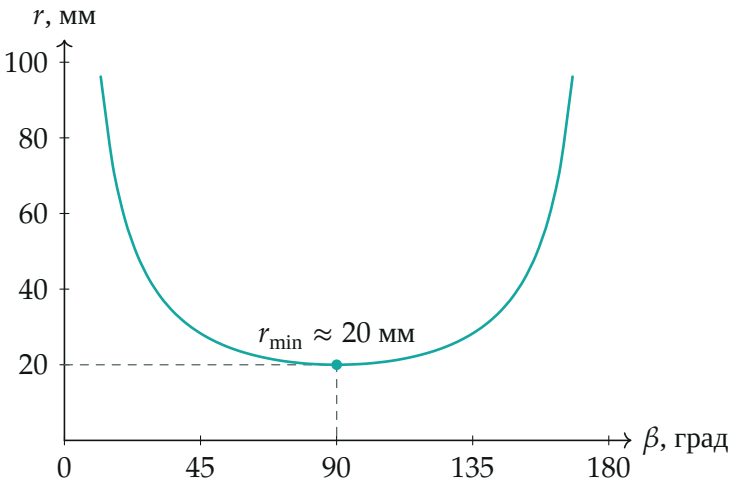
Радиус шарика — проекция ломаной $OH + HB$ на направление OB:

$$R_b = r\cos\beta + L\cos\alpha \approx L + r\cos\beta \approx L,$$

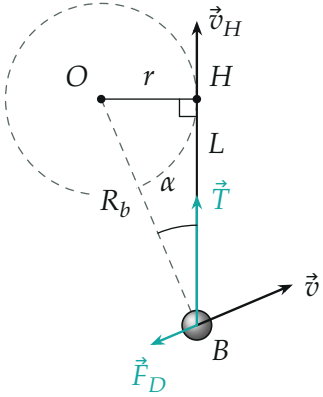
потому что $r\cos\beta/L \lesssim 2\cdot 10^{-2}$ — вклад в несколько процентов; он меньше погрешности исходных данных, и ради удобства его отбрасываем. Приравнивая два выражения для α:

$$\frac{r\sin\beta}{L} = kL \quad \Rightarrow \quad r = \frac{kL^2}{\sin\beta}.$$

5. Почему минимум — при $\beta = 90°$. Радиус руки зависит от угла β — на сколько рука опережает шарик. Чем меньше β, тем больше приходится развести руку, чтобы нитка наклонилась на нужный угол α. Синус не больше единицы, поэтому $r \geq kL^2$, и равенство достигается при $\beta = 90°$. Тогда $\sin\alpha = r/L$: нитка касается окружности руки. Рука тянет шарик вдоль своей скорости, и такой наклон получается при наименьшей окружности. Если радиус руки меньше kL^2, равномерное вращение невозможно: даже при самом выгодном β нитка не наклонится настолько, чтобы натяжение скомпенсировало сопротивление, и шарик будет замедляться.



Радиус руки $r = kL^2/\sin\beta$, $kL^2 = 20$ мм. Кривая идёт вверх с обеих сторон: и при малом, и при большом отставании шарика.



Предельный случай $\beta = 90°$: нитка касается окружности руки, $r = r_{\min}$. Не в масштабе.

6. Ответ. Минимум $r = kL^2$, где $k = 3\rho_0/(16\rho R_0)$ и $\rho_0 = p\mu/(RT)$:

$$r_{\min} = \frac{3L^2}{16\rho R_0}\cdot\frac{p\mu}{RT} = \frac{3\cdot 1^2\cdot 1{,}28}{16\cdot 1200\cdot 0{,}01}\ \text{м} \approx 0{,}020\ \text{м}.$$

Температура в условии названа лишь словами «нормальные условия»: при $T = 273$ K получается 20 мм, при комнатной 293 K — 18,6 мм. Оба значения лежат в допуске.

Проверка. Размерность:

$$\left[\frac{\rho_0 L^2}{\rho R_0}\right] = \frac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^2}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}} = \text{м}.$$

Предел: без воздуха ($\rho_0 \to 0$) нитка радиальна, и рука может стоять на месте, $r_{\min} \to 0$. У более тяжёлого шарика сопротивление относительно слабее, и $r_{\min}$ меньше. Самопроверка допущений: $r_{\min}/L = 0{,}02 \ll 1$, $\alpha \leq r/L = 0{,}02 \ll 1$. Точный расчёт без малых углов (теорема косинусов с $\operatorname{tg}\alpha = kR_b$ и минимизация по R_b) даёт 19,96 мм.

Ответ. $r_{\min} \approx \dfrac{3L^2}{16\rho R_0} \cdot \dfrac{p\mu}{RT} \approx 20$ мм, где R_0 — радиус шарика, R — универсальная газовая постоянная, p — нормальное давление, T — температура воздуха.