Плазменная частота

Задача 7. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 7] Частоту колебаний пространственного заряда в плазме (ионизованном газе) можно определить на основании следующих модельных представлений. Имеется слой плазмы в виде прямоугольного параллелепипеда. Концентрация ионов с зарядом $+e$ равна n и равна концентрации электронов. Ионы и электроны в слое распределены однородно. Можно считать, что слой электронов накладывается на слой ионов. Толщина слоя d много меньше других его линейных размеров. При малом смещении x ($x \ll d$) слоя электронов в направлении нормали к слою (рис. 1) возникают малые колебания. Определите угловую частоту ω этих колебаний. Считайте, что однородность распределения зарядов не нарушается, концентрация не меняется, ионы (поскольку они тяжёлые) — неподвижны. Масса электрона равна m_e, его заряд равен e.

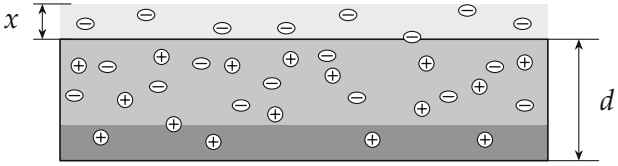
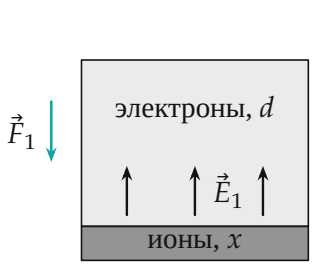


Рис. 1

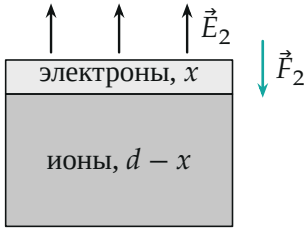
▲ **Решение. Что происходит.** В равновесии слои ионов и электронов лежат точно друг на друге, в каждой точке заряд нулевой, поле нулевое, сила на электроны нулевая. Сдвинем слой электронов на малое x вверх; ионы тяжёлые и стоят на месте, поэтому двигаться может только электронный слой. Теперь у нижней грани торчит тонкий лист неприкрытых ионов, у верхней — тонкий лист неприкрытых электронов, и электроны притягиваются обратно к ионам. Если возвращающая сила пропорциональна смещению, колебания гармонические, а частоту даёт отношение коэффициента пропорциональности к массе слоя. Это задача на силу, а не на энергию: надо найти полную силу, с которой все ионы действуют на все электроны.

Обозначения. S — площадь грани слоя; ось z направим вверх, x — смещение электронов вверх; d — толщина слоя; n — концентрация ионов и электронов; e — модуль заряда электрона.

1. Как разбить трудную задачу на лёгкие. Силу «все ионы на все электроны» считать в лоб тяжело: одни электроны лежат над ионами, другие — рядом, поле у каждой пары разное. Поэтому разобьём ионы на две части: нижний лист толщиной x, которого электроны не прикрывают, и остальные ионы толщиной $d - x$. Линейные размеры слоя много больше d, значит, любая часть — бесконечная заряженная плоскость, поле однородное. Поле плоскости с поверхностной плотностью заряда σ равно $\sigma/(2\varepsilon_0)$.



а: нижний лист ионов



б: остальные ионы

Слева: поле $\vec{E}_1$ нижнего листа ионов действует на все электроны. Справа: поле $\vec{E}_2$ остальных ионов действует на верхний лист электронов, не прикрытый ионами. Толщина x на рисунке сильно преувеличена.

2. Что можно выбросить сразу. Электроны слоя толщиной $d - x$, лежащие над остальными ионами, расположены симметрично относительно их средней плоскости. Поле остальных ионов направлено от неё, и на симметричные пары электронов, верхнюю и нижнюю половины, силы равны по величине и противоположны по направлению. Значит, эти электроны от остальных ионов никакой суммарной силы не получают, как и в равновесии. Остаются два вклада: все электроны в поле нижнего листа ионов и верхний лист электронов в поле остальных ионов.

3. Нижний лист ионов действует на все электроны. Заряд листа

$q_0 = n\,Sx\,e$, поле плоскости

$$E_1 = \frac{q_0}{2\varepsilon_0 S} = \frac{nxe}{2\varepsilon_0},$$

направлено вверх, от положительного листа. Все электроны слоя — их nSd штук — находятся в нём, поле однородно, и сила, направленная вниз, к ионам, равна

$$F_1 = E_1 \cdot nSd\,e = \frac{n^2e^2Sd}{2\varepsilon_0}\,x.$$

4. Остальные ионы действуют на верхний лист электронов. Верхний лист электронов толщиной x лежит над ионами, у самой их верхней границы. Поле плоскости с зарядом ионов $nSde$ (толщину $d - x \approx d$, потому что $x \ll d$)

$$E_2 = \frac{nde}{2\varepsilon_0},$$

направлено вверх, электроны притягиваются вниз. Заряд верхнего листа электронов $nSx\,e$, поле на его толщине однородно, значит

$$F_2 = E_2 \cdot nSx\,e = \frac{n^2e^2Sd}{2\varepsilon_0}\,x.$$

Обратите внимание: $F_1 = F_2$ — в одном случае мал заряд листа, но много электронов, в другом — много ионов, но мал заряд листа электронов, а произведение одно и то же.

5. Уравнение движения слоя. Поля подчиняются принципу суперпозиции, поэтому полная сила на электронный слой — сумма. Обе силы направлены против смещения (вниз при $x > 0$):

$$F = F_1 + F_2 = \frac{n^2e^2Sd}{\varepsilon_0}\,x, \qquad m\ddot{x} = -F.$$

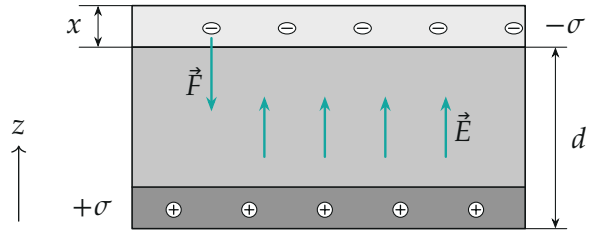
Здесь $m = nSd\,m_e$ — масса электронного слоя. Подставим:

$$nSd\,m_e\ddot{x} = -\frac{n^2e^2Sd}{\varepsilon_0}x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}x.$$

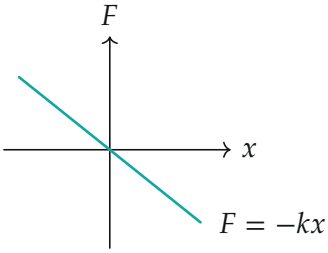
Площадь S и толщина d сократились: частота от них не зависит. Это уравнение гармонических колебаний $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, значит

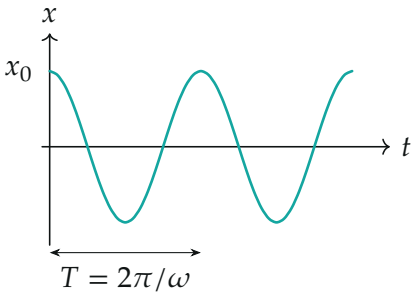
$$\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}}.$$

6. Тот же результат через конденсатор. Незакрытые листы $\pm\sigma$ с $\sigma = nex$ — плоский конденсатор, поле между ними равно сумме полей двух плоскостей: $E = \sigma/\varepsilon_0 = nex/\varepsilon_0$. Электроны слоя (их nSd штук) находятся именно в этом поле, сила на них $F = nSd\,eE$ — та же, что и выше. Складываются два листа, потому что положительный лист притягивает электрон, а отрицательный отталкивает: поэтому поле равно σ/ε_0, а не $\sigma/(2\varepsilon_0)$, и в сумме $F_1 + F_2$ получается удвоенное значение каждого слагаемого.



Незакрытые листы $\pm\sigma$ образуют плоский конденсатор; поле $\vec{E}$ направлено от $+\sigma$ к $-\sigma$, сила $\vec{F}$ на электрон — обратно.





Слева: возвращающая сила, $k = ne^2/\varepsilon_0$. Справа: смещение слоя $x(t) = x_0 \cos \omega t$.

Проверка. Размерность:

$$\left[\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}\right] = \frac{\text{м}^{-3}\cdot\text{Кл}^2}{\text{кг}\cdot\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2)} = \frac{\text{Н}}{\text{кг}\cdot\text{м}} = \text{с}^{-2},$$

верно. Предел: при $n \to 0$ листы почти не заряжены, силы нет и $\omega \to 0$. Для $n = 10^{18}$ м$^{-3}$ получаем $\omega \approx 5{,}6\cdot 10^{10}$ с$^{-1}$, то есть частота около 9 ГГц. Смысл: частота не зависит ни от амплитуды, ни от толщины слоя, только от концентрации электронов: чем плотнее плазма, тем сильнее возвращающее поле и тем быстрее колебания.

Ответ. $\omega = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}}$.