Цепь с неизвестными

Задача 8. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 8] В цепи, изображённой на рис. 2, сопротивление каждого из резисторов равно R. Выводы A и B цепи на время t_0 подключают к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Индуктивность катушки и ёмкость конденсатора подобраны таким образом, что при подключенном источнике в любой момент времени разность потенциалов точек E и F равна нулю. Определите заряд, протекающий через источник за время t_0. Если за время подключения источника в резисторах суммарно выделяется количество теплоты Q, то какое количество теплоты выделится в одном резисторе после отключения источника?

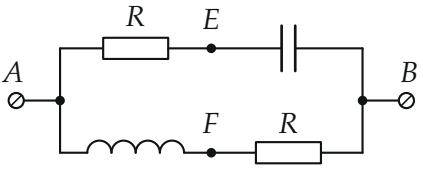


Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** В цепи неизвестны L и C, но дано главное: потенциалы точек E и F равны в любой момент. Это значит, что по проводу между ними не пойдёт ток, и его можно мысленно добавить: цепь не изменится. Тогда она распадается на два блока подряд (слева от провода и справа), и напряжения на них известны через токи ветвей. Дальше две части: заряд — через ток источника, теплота после отключения — через энергию. Модель: идеальный источник, идеальные катушка и конденсатор, сопротивление идёт только от резисторов; до подключения тока и заряда нет.

Обозначения. i_C — ток верхней ветви (резистор и конденсатор), i_L — ток нижней ветви (катушка и резистор), оба — от A к B; U_C — напряжение на конденсаторе, $I = i_C + i_L$ — ток через источник.

1. Что даёт равенство потенциалов. Запишем, чему равна ЭДС вдоль каждой ветви. Падение напряжения в сумме по ветви от A до B

равно $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = i_C R + U_C \quad \text{(верхняя ветвь)}, \qquad \mathcal{E} = L\frac{di_L}{dt} + i_L R \quad \text{(нижняя ветвь)}.$$

Теперь используем $\varphi_E = \varphi_F$. Потенциал точки F относительно B — напряжение на нижнем резисторе, $i_L R$; потенциал E относительно B — напряжение на конденсаторе U_C. Их равенство:

$$U_C = i_L R.$$

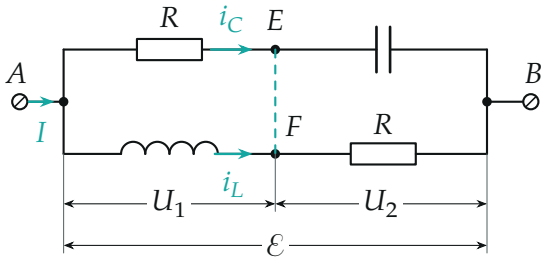
Потенциалы E и F равны и относительно A: падение на верхнем резисторе равно падению на катушке,

$$i_C R = L\frac{di_L}{dt}.$$

Подставим эти равенства в уравнения ветвей. Верхнее становится $\mathcal{E} = i_C R + i_L R$, нижнее — тем же: $\mathcal{E} = i_C R + i_L R$. Итог:

$$\mathcal{E} = (i_C + i_L)R = IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Ток источника постоянен в течение всего времени подключения, как будто нагрузка — один резистор R. Ни L, ни C в ответ не вошли.



Провод EF ничего не меняет: потенциалы его концов равны, тока по нему нет. Цепь — два параллельных блока подряд, напряжения на них U_1 и U_2.

2. Заряд через источник. За малое время dt через источник проходит заряд $dq = I\,dt = (i_C + i_L)\,dt$: он равен сумме зарядов, прошедших по

двум ветвям. Ток постоянен, поэтому складывать заряды за все малые промежутки легко:

$$q = It_0 = \frac{\mathcal{E}t_0}{R}.$$

3. Энергия за время подключения. Закон сохранения энергии для всей цепи за время t_0: работа источника равна выделившейся теплоте плюс изменению энергии катушки и конденсатора. Работа источника — $A = q\mathcal{E}$, потому что сторонние силы гонят заряд q от отрицательного полюса к положительному, преодолевая разность потенциалов $\mathcal{E}$. В начале тока и заряда нет, поэтому изменение энергии элементов равно их энергии в конце, $W = W_L + W_C$:

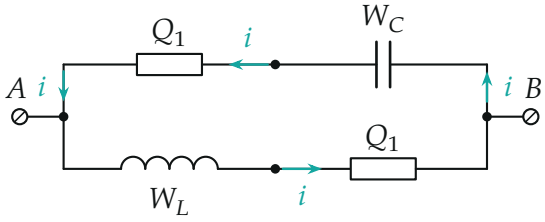
$$q\mathcal{E} = Q + W \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{R} - Q.$$

Закон сохранения энергии — единственное, что нужно: как именно менялись токи, знать не требуется.

4. Что происходит после отключения. Источник отключён, остаётся контур из резистора, конденсатора, резистора и катушки, по которому идёт один ток. В первый момент состояние то же, что было: ток катушки не может измениться скачком, потому что напряжение на ней конечно, а $\Delta i = \int U\,dt/L \to 0$, и напряжение на конденсаторе тоже не может измениться скачком, потому что ток конечен. Значит, начальная энергия контура — та же W.

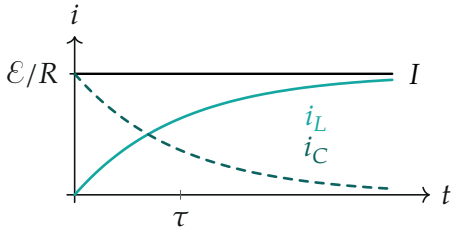
Конечное состояние: ток затухает до нуля, а при нулевом токе напряжения на резисторах и катушке нулевые, значит, и на конденсаторе тоже. Вся энергия W перешла в тепло $Q_{R_1} + Q_{R_2} = W$. Резисторы одинаковы, соединены последовательно, поэтому ток в них в каждый момент один и тот же, и за любой малый промежуток dt на каждом выделяется $i^2R\,dt$ — поровну. Складывая по всему процессу, получаем $Q_{R_1} = Q_{R_2}$, откуда

$$Q_1 = \frac{W}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}^2 t_0}{R} - Q\right) = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2}.$$



После отключения: один контур, один ток i; энергия $W_C + W_L$ уходит в тепло в двух резисторах поровну.

5. Что стоит за равенством потенциалов. Продифференцируем $U_C = i_L R$, где $i_C = C\,dU_C/dt$: получаем $i_C = RC\,di_L/dt$. Из $i_C R = L\,di_L/dt$ следует $L = CR^2$ (ток катушки меняется, $di_L/dt \neq 0$). При этом $W_C = \dfrac{CU_C^2}{2} = \dfrac{CR^2 i_L^2}{2} = \dfrac{Li_L^2}{2} = W_L$: энергии конденсатора и катушки всё время равны. Токи ветвей — на графике: ток катушки растёт, ток конденсатора падает, а сумма постоянна.



Токи ветвей: ток катушки растёт, ток конденсатора падает, а их сумма — ток источника — постоянна.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}^2 t_0/R$ — это $\text{В}^2 \cdot \text{с}/\text{Ом} = \text{Дж}$, как и Q. Предел: при $t_0 \to 0$ ток не успевает набрать и $Q_1 \to 0$. Второй способ для первого вопроса: сопротивление цепи между A и B для гармонического тока при $L = CR^2$ (оператор $p = i\omega$). Верхняя ветвь $Z_1 = R + \dfrac{1}{pC} = \dfrac{1 + pRC}{pC}$, нижняя $Z_2 = R + pL = R(1 + pRC)$. Тогда

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R(1 + pRC)^2/(pC)}{(1 + pRC)^2/(pC)} = R$$

на любой частоте, и ток $\mathcal{E}/R$ получается независимо. Смысл: для источника цепь неотличима от резистора R, хотя внутри поровну копится энергия в конденсаторе и катушке.

Ответ. $q = \dfrac{\mathcal{E}t_0}{R}$; после отключения в каждом резисторе выделяется $Q_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \dfrac{Q}{2}$.