Фотография пластины

Задача 9. [МОШ 2018/19, 11 класс, задача 9] Диск толщиной около 1,5 см, сделанный из прозрачного материала, разрезали вдоль одного из диаметров. Получившуюся пластину, имеющую форму половины цилиндра, поставили на «миллиметровку», так что поверхность, вдоль которой разрезали диск, оказалась обращена вниз, а выпуклая поверхность полуцилиндра — вверх. Затем эту пластину фотографируют сверху, стараясь ориентировать оптическую ось объектива фотоаппарата вертикально (рис. 3), так чтобы она проходила через середину пластины. Фотография приведена ниже.

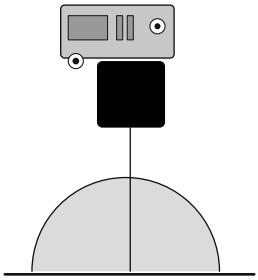


Рис. 3

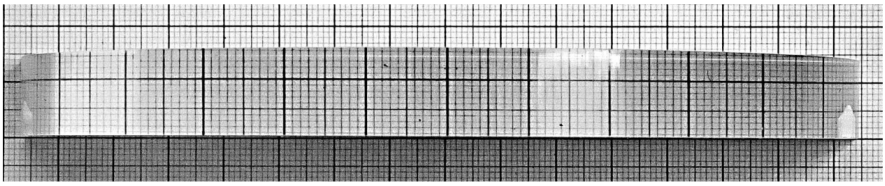


Рис. 4

1. Определите показатель преломления материала пластины.
2. На фотографии внутри пластины видны изображения полос сетки. Какое максимальное количество изображений полос, перпендикулярных пластине, может увидеть наблюдатель, располагающийся на расстоянии $h = 15$ см над центром пластины?

3. Оцените расстояние H от «миллиметровки» до главной плоскости объектива фотоаппарата при фотографировании пластины.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Свет от сетки идёт вверх через стекло и выходит наружу через выпуклую поверхность. На фотографии видно: внутри пластины сетка растянута (где снаружи 20 мм, внутри заметно больше), а у краёв линии пропадают. Пластина — лупа; нужно понять, почему увеличение именно такое и откуда граница видимости. Для центральной полоски, где углы малы, полуцилиндр можно мысленно разделить на плоскопараллельную пластину толщиной R и тонкую плосковыпуклую линзу с радиусом R: каждую часть мы умеем считать. Показатель преломления найдём из увеличения. Граница видимости — это луч, который ещё может выйти из стекла в воздух и попасть в глаз; тот же расчёт в обратную сторону даст расстояние до объектива.

Обозначения. O — середина основания (центр кривизны), R — радиус кривизны, X — расстояние линии сетки от O вдоль основания, θ_c — предельный угол, φ — угол между радиусом OP в точку выхода луча и основанием.

1. Показатель преломления.

Пластина. Возьмём точку P сетки на глубине R под верхней гранью пластины. Смотрим вдоль оптической оси, углы лучей к вертикали малы, поэтому синусы и тангенсы равны самим углам. Луч идёт в стекле под углом β, после выхода — под углом α, и закон преломления даёт $\alpha = n\beta$: вышедший луч наклонён сильнее. Его продолжение назад пересекает вертикаль через P не в P, а выше: за путь R луч сместился вбок на $R\beta$, а продолжение набирает такой сдвиг на глубине s под гранью, где $s\alpha = R\beta$:

$$s = \frac{R}{n}.$$

Изображение P' лежит на той же вертикали, что и P, на расстоянии R/n под гранью. Поперечные размеры не изменились: пластина сетку не увеличивает, а только приподнимает.

Линза. Фокусное расстояние плосковыпуклой линзы (радиус R, вто-

рая поверхность плоская):

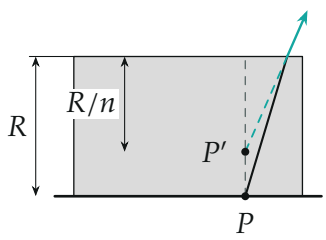
$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow F = \frac{R}{n-1}.$$

Формулу тонкой линзы пишут для линзы в воздухе, поэтому мысленно вставим между линзой и пластиной воздушный зазор толщиной $d \to 0$: на ход лучей он не влияет. Предмет для линзы — изображение P' на расстоянии $a = R/n$, а $\frac{R}{n} < \frac{R}{n-1} = F$. Предмет ближе фокуса, значит, линза работает как лупа и даёт мнимое изображение. Если b — его расстояние до линзы (с той же стороны, что предмет),

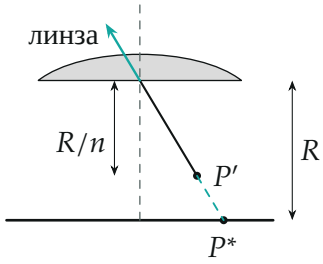
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \Rightarrow \frac{n}{R} - \frac{1}{b} = \frac{n-1}{R} \Rightarrow b = R.$$

Изображение P^* лежит на расстоянии R под линзой, то есть в той же плоскости, где лежит сетка; это объясняет, почему клетки на фото выглядят прямо на месте пластины. Поперечные размеры меняет только линза:

$$\Gamma = \frac{b}{a} = \frac{R}{R/n} = n.$$



а: пластина



б: линза

Разбиение полуцилиндра: пластина толщиной R и тонкая плосковыпуклая линза. Углы на рисунке увеличены.

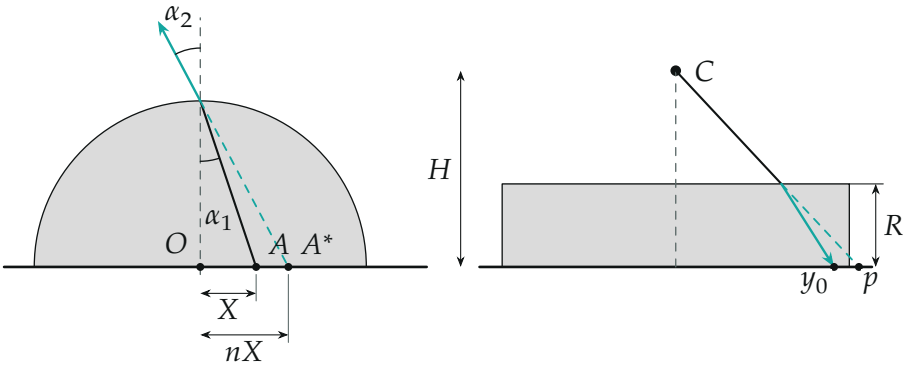
Числа. На фотографии вне пластины 1 см сетки занимает 79,2 пиксела, внутри пластины у центра — 116–117 пикселов (линии ± 1, ± 2 см

отстоят от центральной на 116,5 и 233 пиксела). Те же 20 мм, которые снаружи выглядят как 20 мм, внутри выглядят как около 29,5 мм. Отсюда

$$n = \Gamma = \frac{116{,}5}{79{,}2} \approx 1{,}47.$$

При $|X| \leq 2$ см углы малы, поправка меньше 1%; разброс слева и справа даёт $n = 1{,}47 \pm 0{,}03$.

Проверка другим способом. Луч от точки сетки A к вершине купола идёт под малым углом $\alpha_1 \approx X/R$; нормаль в вершине вертикальна, выходит луч под $\alpha_2 \approx n\alpha_1$. Продолжение вышедшего луча назад пересекает плоскость сетки в A^* на расстоянии $R \operatorname{tg} \alpha_2 \approx nX$ от O: то же $\Gamma = n$.



Слева: ход луча от A к вершине купола (разрез), A^* — изображение. Справа: луч от объектива C вдоль оси цилиндра (второй способ п. 3). Углы увеличены.

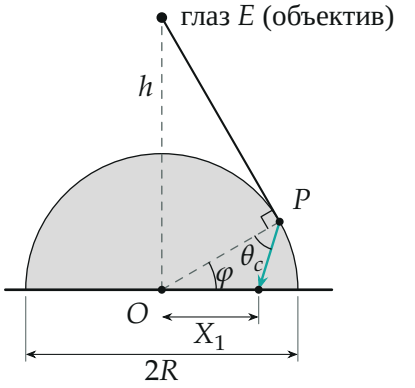
2. Сколько полос видно (пункт 2). Глаз E на высоте $h = 15$ см над центром. Крайний луч, который вообще может попасть в глаз со стороны поверхности, — касательная к цилиндру из точки E: за ней поверхности для глаза нет. Пусть он касается её в точке P. Прямоугольный треугольник OPE даёт $\sin \varphi = R/h$, где φ — угол между OP и основанием.

Теперь посмотрим, как этот луч шёл внутри стекла. Снаружи он касается поверхности, то есть образует с нормалью OP угол 90°. По закону преломления внутри стекла он идёт под углом θ к нормали, где

$n\sin\theta = \sin 90°$, то есть $\sin\theta_c = \dfrac{1}{n}$, $\theta_c \approx 42{,}9°$ — предельный угол. Лучи от более далёких точек сетки подходят к поверхности под большим углом: для них $n\sin\theta > 1$, преломления нет, свет полностью отражается внутрь и в глаз не попадёт. Лучи от более близких — вышли бы мимо глаза. Значит, видны только линии с $|X| < X_1$, где X_1 — точка сетки, из которой предельный луч приходит к P.

Найдём X_1 из треугольника OXP: угол при O равен φ, при P равен θ_c, при X равен $180° - \varphi - \theta_c$. Теорема синусов:

$$\frac{X_1}{\sin\theta_c} = \frac{R}{\sin(\varphi+\theta_c)}, \qquad X_1 = \frac{R\sin\theta_c}{\sin(\varphi+\theta_c)}.$$



Граница видимости: ход предельного луча от точки X_1 к глазу E или объективу (в разрезе). Углы увеличены.

Числа. Пластина на фото занимает 1200 пикселов, то есть около 152 мм: $R \approx 75$ мм. Отсчитываем h от плоскости сетки: $\sin\varphi = 75/150 = 0{,}5$, $\varphi = 30°$:

$$X_1 = \frac{75\cdot 0{,}680}{\sin 72{,}9°} \approx 53 \text{ мм}, \qquad N = \frac{2X_1}{1 \text{ мм}} \approx 107.$$

Линии идут через 1 мм, число полос равно $2X_1$ в миллиметрах. Разброс $R = 73$–77 мм и $n = 1{,}47 \pm 0{,}03$ даёт $N = 104$–109. У организаторов $N = 103 \pm 3$ (засчитывается 95–110): в пределах точности замера R.

3. Расстояние до объектива (пункт 3). Объектив фотоаппарата — тот же глаз, только высота H неизвестна. Зато по снимку видно, сколько полос на нём различимо: по картинке внутри пластины с каждой стороны около 56–58 линий, то есть $X_1 \approx 58$ мм (всего около 116 линий). Теперь тот же треугольник решаем в обратную сторону: известен X_1, надо найти φ и затем H.

$$\sin(\varphi+\theta_c) = \frac{R\sin\theta_c}{X_1} = \frac{75\cdot 0{,}680}{58} \approx 0{,}879 \;\Rightarrow\; \varphi \approx 61{,}5^\circ - 42{,}9^\circ \approx 18{,}6^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника OPE ($\sin\varphi = R/H$) $H = R/\sin\varphi \approx 75$ мм$/0{,}32 \approx 23$–24 см. Оценка грубая: H очень чувствителен к счёту линий ($X_1 = 56$, 59, 60 мм дают 19, 26, 28 см), поэтому в ответе — официальное $H \approx 28 \pm 4$ см (в критериях — $H > 24$ см), с которым наши 24 см согласуются в пределах точности счёта.

Второй способ: масштаб вдоль оси цилиндра. Вдоль оси цилиндра поверхность плоская. Для объектива на высоте H линия сетки на расстоянии y_0 от оси в стекле кажется ближе: луч в точке купола (y_s, R) идёт под малым углом $\operatorname{tg} \approx y_s/(H-R)$ (правая часть первого рисунка), а в стекле угол в n раз меньше. Внутри пластины расстояния между горизонтальными линиями растянуты в

$$k = \frac{H}{H - R(1-1/n)} \text{ раз}, \qquad H = \frac{R(1-1/n)}{1-1/k}.$$

Ответу $H \approx 28$ см отвечает $k \approx 1{,}09$: $H = \dfrac{7{,}5\cdot 0{,}32}{1-1/1{,}09} \approx 29$ см. Ошибка 1% в k меняет H на 3–4 см — тоже лишь оценка.

Проверка. В пункте 2 при $h \to R$ ($\varphi \to 90^\circ$) $X_1 \to R\sin\theta_c/\cos\theta_c = R/\sqrt{n^2-1}$, а при $h \to \infty$ ($\varphi \to 0$) $X_1 \to R$: издалека видна вся ширина пластины. Смысл: сетка растянута в n раз, у краёв её скрывает предельный угол.

Ответ. 1) $n \approx 1{,}47 \pm 0{,}05$; 2) $N \approx 107$ (у организаторов 103 ± 3); 3) $H \approx 28 \pm 4$ см (по числу видимых полос — ≈ 24 см, грубо).