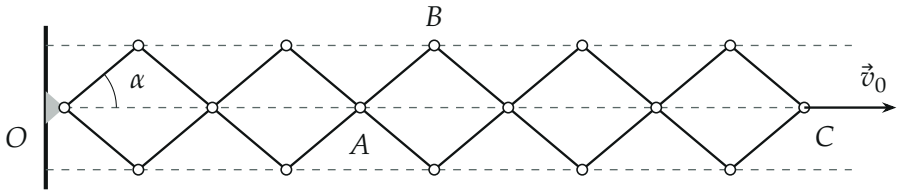
Нюрнбергские ножницы

Задача 1. [МОШ 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 1] На рисунке изображен шарнирный механизм — «Нюрнбергские ножницы». Точка C движется с постоянной скоростью $v_0 = 60$ см/с.



1. Найдите скорость точки A. Ответ выразите в см/с, округлите до целых.
2. Найдите скорость точки B в тот момент, когда угол $\alpha = 30°$. Ответ выразите в см/с, округлите до десятых.

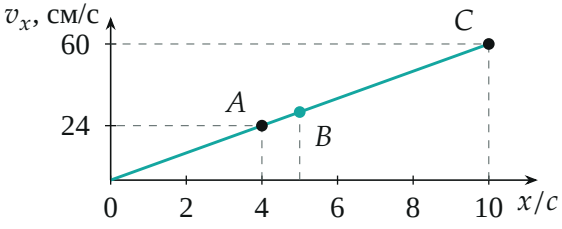
▲ **Решение. Что происходит.** Конец C тянут вправо, ножницы раздвигаются, угол α уменьшается. Все звенья одинаковы и образуют одинаковые ромбы, поэтому шарниры на оси OC стоят через равные расстояния, а скорости любых двух шарниров на оси относятся как их расстояния от стены O. Главная идея: записать координаты нужных точек через один угол α и продифференцировать по времени.

Обозначения. l — длина звена (от шарнира до соседнего шарнира), $c = l\cos\alpha$ — проекция звена на ось, x — координата вдоль оси от O, y — вертикальная координата.

1. Координаты шарниров. Звено длиной l наклонено к оси на угол α, поэтому верхний шарнир первого ромба имеет координаты $x = l\cos\alpha$, $y = l\sin\alpha$. Все верхние шарниры лежат на этой высоте, а их абсциссы равны $c, 3c, 5c, \ldots$; шарниры на оси (места, где звенья скрещиваются) — $2c, 4c, 6c, 8c$, и конец C — $x_C = 10c$ (пять ромбов по $2c$). Для нужных точек

$$x_A = 4c = 4l\cos\alpha, \qquad x_B = 5c = 5l\cos\alpha,$$
$$y_B = l\sin\alpha, \qquad x_C = 10l\cos\alpha.$$

Точка B — третий сверху шарнир, точка A — второй шарнир на оси (по рисунку).



Горизонтальные скорости шарниров растут пропорционально абсциссе: $v_x = v_0\, x/x_C$; B — верхний шарнир, он лежит над осью на $x = 5c$

2. Пункт 1: скорость A. Отношение $x_A/x_C = 4/10$ от угла не зависит (длина l и $\cos\alpha$ сократились), поэтому скорости относятся так же:

$$v_A = \frac{4}{10}\, v_C = 0{,}4 \cdot 60 = 24 \text{ см/с}.$$

Точка A лежит на оси и по симметрии движется только вдоль оси, вправо, как и C.

3. Пункт 2: горизонтальная скорость B. Так же $x_B/x_C = 5/10$, значит

$$v_{Bx} = \frac{1}{2}\, v_0 = 30 \text{ см/с}.$$

4. Вертикальная скорость B. Здесь нужна связь с углом. Продифференцируем по времени $x_C = 10l\cos\alpha$ и $y_B = l\sin\alpha$ (длина l постоянна):

$$v_0 = \dot{x}_C = -10l\sin\alpha \cdot \dot{\alpha}, \qquad \dot{y}_B = l\cos\alpha \cdot \dot{\alpha}.$$

Выразим $\dot{\alpha}$ из первого равенства, $\dot{\alpha} = -\dfrac{v_0}{10l\sin\alpha}$, и подставим во второе:

$$v_{By} = \dot{y}_B = -\frac{v_0}{10}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Знак минус: точка B движется вниз — ножницы раздвигаются, α умень-

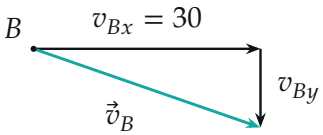
шается, y_B убывает. При $\alpha = 30°$, $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$:

$$|v_{By}| = \frac{60\sqrt{3}}{10} \approx 10{,}4 \text{ см/с}.$$

5. Модуль скорости B.

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{30^2 + 10{,}39^2} = \sqrt{1008} \approx 31{,}7 \text{ см/с}.$$

Скорость направлена вправо-вниз под углом $\operatorname{arctg} \dfrac{10{,}39}{30} \approx 19°$ к оси.



Скорость B при $\alpha = 30°$ (масштаб: 10 см/с = 1 см): $v_{Bx} = 30$ см/с, $|v_{By}| \approx 10{,}4$ см/с, $v_B \approx 31{,}7$ см/с

Обратите внимание: при дифференцировании нельзя считать длину l переменной — меняются только α и координаты, а звено остаётся жёстким.

Проверка. Второй способ для v_{By}: $y_B = \sqrt{l^2 - (x_C/10)^2}$, тогда $\dot{y}_B = -\dfrac{x_C \dot{x}_C}{100\, y_B} = -\dfrac{10l \cos\alpha \cdot v_0}{100\, l \sin\alpha} = -\dfrac{v_0}{10} \operatorname{ctg}\alpha$ — то же. Размерность: см/с. Предел: при $\alpha \to 90°$ (ножницы сложены) $v_{By} \to 0$, а $v_{Bx} = v_0/2$; при $\alpha \to 0$ (ножницы почти вытянуты) $v_{By} \to \infty$ — чуть-чуть растянуть вытянутую цепочку можно только резко поднимая шарниры.

Смысл: цепочка ромбов увеличивает ход конца: каждый шарнир на оси проходит долю пути точки C, равную своему номеру из десяти.

Ответ. 1) $v_A = 24$ см/с; 2) $v_B \approx 31{,}7$ см/с.