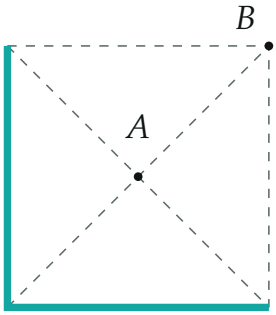
Электрон и заряженный уголок

Задача 10. [МОШ 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 10] Электрон, находящийся в точке A в состоянии покоя, отталкивается от равномерно заряженного по длине уголка вдоль линии AB. В точке B скорость электрона оказалась равной v. Точка A на рисунке — центр квадрата.



1. Выберите правильное утверждение:
   А) Уголок заряжен отрицательно;
   Б) уголок заряжен положительно;
   В) $u > v$, где u — скорость электрона на очень большом расстоянии от уголка;
   Г) $u < v$.
2. Найдите отношение $\dfrac{u}{v}$. Ответ округлите до десятых.

(1 балл — за ответ А; 2 балла — за ответ В.)

▲ **Решение. Что происходит.** Электрон отталкивается от уголка, значит, заряд уголка того же знака, что у электрона. Потенциальная энергия электрона в поле уголка при удалении падает до нуля, и она переходит в кинетическую. Силу и потенциал уголка в лоб считать трудно, но их отношение в двух точках находится из соображений подобия: главная идея — разрезать стороны на одинаковые куски. Тогда закон сохранения энергии даст ответ.

Обозначения. a — сторона квадрата, λ — линейная плотность заряда уголка (одинакова на обеих сторонах), φ_A и φ_B — потенциалы в точках

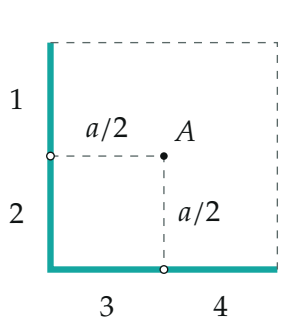
A и B (на бесконечности потенциал нулевой), e — модуль заряда электрона, m — его масса.

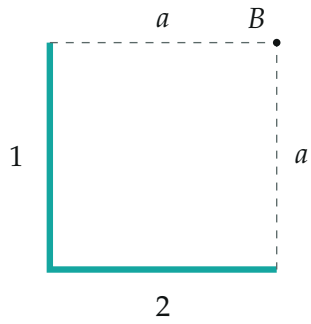
1. Знак заряда (пункт 1, утверждение о знаке). Электрон имеет отрицательный заряд. Он отталкивается от уголка, и сила отталкивания направлена от уголка; значит, уголок заряжен отрицательно: утверждение А верно, Б неверно.

2. Направление движения. Уголок симметричен относительно диагонали квадрата, проходящей через его вершину и точки A и B. Поэтому сила на электрон на этой диагонали направлена вдоль неё, и электрон движется по прямой AB дальше до бесконечности.

3. Потенциал в точке A. Потенциал от отрезка с линейной плотностью λ равен $k\lambda$, умноженному на безразмерную функцию формы: от длины отрезка и расстояния до точки он зависит только через их отношение (при увеличении всех длин в n раз заряд растёт в n раз, а расстояния — тоже). Центр квадрата A отстоит от каждой стороны на $a/2$, и основание перпендикуляра — середина стороны. Делим каждую сторону на две половины: получаем четыре отрезка длины $a/2$, и от каждого A видна из точки на расстоянии $a/2$ по перпендикуляру от его конца.

4. Потенциал в точке B. Левая сторона уголка и нижняя — противоположные для вершины B. Основание перпендикуляра из B на левую сторону — её верхний конец (вершина квадрата), расстояние a равно длине стороны. То же для нижней стороны. Значит, от каждой из двух сторон B видна из точки на расстоянии, равном длине отрезка, по перпендикуляру от его конца — то же соотношение, что для четырёх кусков пункта 3.





Слева — точка A: каждая из сторон уголка делится пополам, получаются четыре одинаковых по виду куска (1–4) с длиной $a/2$ и расстоянием $a/2$ по перпендикуляру от конца. Справа — точка B: две стороны (1, 2) длины a и расстояние a по перпендикуляру от конца. Обозначим φ_1 потенциал, который создаёт в нужной точке один такой кусок

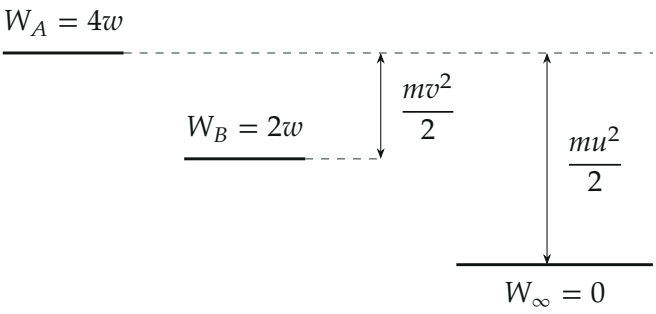
Потенциал одного куска в обоих случаях одинаков, обозначим $\varphi_1 = k\lambda\, g$, где $g > 0$ — одна и та же безразмерная постоянная ($g = \ln(1+\sqrt{2})$; её значение нам не понадобится). Потенциал суммируется (принцип суперпозиции), поэтому

$$\varphi_A = 4\varphi_1, \qquad \varphi_B = 2\varphi_1, \qquad \varphi_\infty = 0.$$

Потенциал в точке A ровно вдвое больше, чем в точке B. Уголок заряжен отрицательно, $\lambda < 0$, поэтому $\varphi_1 < 0$; введём положительную величину $w = e|\varphi_1|$.

5. Закон сохранения энергии. Потенциальная энергия электрона в точке с потенциалом φ равна $-e\varphi$ (заряд $-e$): $W_A = 4w$, $W_B = 2w$, $W_\infty = 0$. На электрон действует только сила поля, поэтому полная энергия сохраняется. От A до B и от A до бесконечности:

$$\frac{mv^2}{2} = W_A - W_B = 2w, \qquad \frac{mu^2}{2} = W_A - W_\infty = 4w.$$



Потенциальная энергия электрона в точках A, B и на бесконечности; стрелки — приобретённая кинетическая энергия

6. Ответ на пункт 2. Делим второе равенство на первое:

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{4w}{2w} = 2 \;\Rightarrow\; \frac{u}{v} = \sqrt{2} \approx 1{,}4.$$

Значит, $u > v$ (утверждение В верно, Г неверно): после точки B электрон продолжает ускоряться, пока отталкивается от уголка.

Обратите внимание: значение потенциала уголка вычислять не нужно — ответ получается из отношения $\varphi_A/\varphi_B = 2$, которое следует из подобия и суперпозиции.

Проверка. Размерность: u/v безразмерно. Второй способ для отношения потенциалов: $\varphi_1 = k\lambda \ln(1+\sqrt{2})$ для куска с перпендикуляром от конца и длиной, равной расстоянию ($\int_0^a dx/\sqrt{x^2+a^2} = \ln(1+\sqrt{2})$); для центра квадрата сторона a, расстояние $a/2$ от середины: $\int_{-a/2}^{a/2} dx/\sqrt{x^2+a^2/4} = 2\ln(1+\sqrt{2})$, то есть $2\varphi_1$ на сторону и $4\varphi_1$ на уголок — как в п. 3. Знак: $u > v$, потому что потенциальная энергия в B положительна ($2w > 0$) и тоже превращается в кинетическую.

Смысл: оба отношения энергий определяются только геометрией уголка, заряд и масса сокращаются.

Ответ. 1) А, В; 2) $\dfrac{u}{v} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.