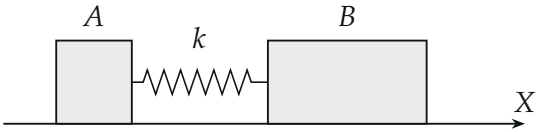
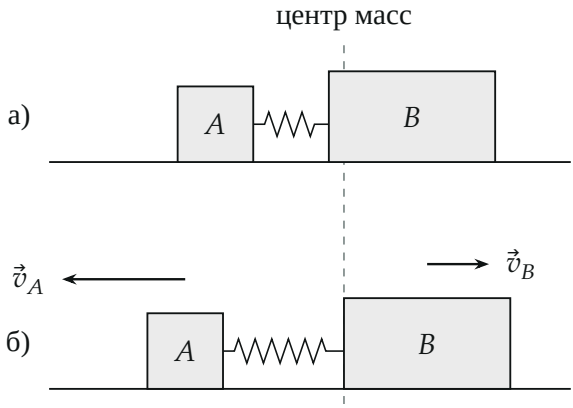
Два бруска на пружине

Задача 11. [МОШ 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 11] На гладком горизонтальном столе лежат два бруска A и B, имеющие массы 1 кг и 2 кг соответственно. Бруски соединены невесомой пружиной жёсткостью 100 Н/м сжатой в начальный момент на величину 2 см. Систему отпускают без начальной скорости. Найдите модуль относительной скорости брусков в момент, когда пружина окажется в недеформированном состоянии. Ответ выразите в м/с, округлите до сотых.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока пружина распрямляется, бруски разъезжаются в разные стороны. Горизонтальных внешних сил нет (стол гладкий, силы тяжести и реакции стола вертикальны), поэтому импульс системы сохраняется и равен нулю, центр масс стоит на месте. Энергия сжатой пружины целиком переходит в кинетическую энергию брусков. Главная идея: два закона сохранения — импульса и энергии — для системы двух брусков за время распрямления пружины.

Обозначения. $m_A = 1$ кг, $m_B = 2$ кг, $k = 100$ Н/м, $x = 0{,}02$ м — начальное сжатие; v_A, v_B — модули скоростей брусков в момент, когда пружина не деформирована. Ось X вдоль стола вправо.



а) пружина сжата, бруски покоятся; б) пружина не деформирована, бруски разъезжаются (длины стрелок $v_A : v_B = 2 : 1$). Центр масс всё время стоит на месте

1. Закон сохранения импульса. Система — два бруска и пружина; внешние горизонтальные силы отсутствуют, поэтому горизонтальный импульс сохраняется. Начальный импульс нулевой, значит и в момент, когда пружина стала недеформированной, суммарный импульс равен нулю. Бруски движутся в противоположные стороны, и в проекции на ось X

$$-m_A v_A + m_B v_B = 0 \;\Rightarrow\; v_A = \frac{m_B}{m_A} v_B = 2v_B.$$

Лёгкий брусок A движется быстрее тяжёлого.

2. Закон сохранения энергии. Трения нет, поэтому механическая энергия системы сохраняется: начальная энергия сжатой пружины равна сумме кинетических энергий брусков в момент, когда пружина стала недеформированной:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2}.$$

Подставим $v_A = 2v_B$:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{m_A \cdot 4v_B^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{(4m_A + m_B)v_B^2}{2} \;\Rightarrow\; v_B = x\sqrt{\frac{k}{4m_A + m_B}}.$$

Числа: $\dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{100 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2} = 0{,}02$ Дж, $4m_A + m_B = 6$ кг, $v_B = 0{,}02\sqrt{\dfrac{100}{6}} \approx 0{,}0816$ м/с, $v_A = 2v_B \approx 0{,}1633$ м/с.

3. Относительная скорость. Бруски разъезжаются, их скорости направлены противоположно, поэтому модуль относительной скорости равен сумме:

$$v_{\text{отн}} = v_A + v_B = 3v_B \approx 0{,}245 \text{ м/с} \approx 0{,}24 \text{ м/с}.$$

(точнее 0,2449 м/с: округление до сотых даёт 0,24).

Обратите внимание: относительную скорость нельзя считать как разность модулей — бруски разъезжаются, их скорости направлены в разные стороны.

Проверка. Второй способ — через приведённую массу $\mu = \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \dfrac{2}{3}$ кг: в системе центра масс энергия $\dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}$, откуда $v_{\text{отн}} = x\sqrt{k/\mu} = 0{,}02\sqrt{150} \approx 0{,}245$ м/с — то же. Размерность: $x\sqrt{k/m}$ — м/с. Предел: при $m_B \to \infty$ тяжёлый брусок стоит, $v_{\text{отн}} = v_A = x\sqrt{k/m_A} = 0{,}2$ м/с — как у груза на пружине, закреплённой с одного конца.

Смысл: пружина «делит» выделенную энергию между брусками обратно пропорционально их массам.

Ответ. $v_{\text{отн}} = x\sqrt{\dfrac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}} \approx 0{,}24$ м/с.