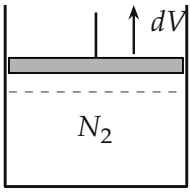
Теплоёмкость процесса с азотом

Задача 12. [МОШ 2019/20, отборочный этап, 11 класс, задача 12] В сосуде под поршнем находится азот. Поршень медленно приподнимают, понижая давление газа. Какова молярная теплоёмкость газа в данном процессе, если изменение давления составляет 0,5% при увеличении объема на 1%? Ответ выразите в единицах R (универсальна газовая постоянная), округлите до десятых.

▲ **Решение. Что происходит.** Газ медленно расширяется, давление падает вдвое медленнее, чем растёт объём: $\dfrac{\Delta p}{p} = -0{,}5\,\dfrac{\Delta V}{V}$. Чтобы найти молярную теплоёмкость такого процесса, надо взять малое изменение состояния и найти отношение полученного тепла к приращению температуры, умноженному на число молей. Главная идея: первое начало термодинамики для малого шага плюс уравнение состояния, которое связывает dT с dp и dV.

Обозначения. ν — число молей азота, p, V, T — его состояние, dQ, dT, dV, dp — малые приращения, C — молярная теплоёмкость в этом процессе, $C_V = \frac{5}{2}R$ — молярная теплоёмкость азота при постоянном объёме (азот двухатомный; колебания молекул при обычных температурах не возбуждены).



Поршень медленно поднимают (пунктир — прежнее положение): объём растёт на dV, давление при этом чуть падает

1. Первое начало для малого шага. Количество теплоты, полученное газом, идёт на изменение внутренней энергии и на работу против внешнего давления. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, поэтому

$$dQ = \nu C_V\,dT + p\,dV.$$

Работа $p\,dV$ положительна: газ расширяется.

2. Приращение температуры. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ для малых приращений (произведение $p\,V$ меняется на $p\,dV + V\,dp$):

$$\nu R\,dT = p\,dV + V\,dp = pV\left(\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p}\right).$$

Подставим $\dfrac{dV}{V} = \varepsilon$, $\dfrac{dp}{p} = -0{,}5\varepsilon$ ($\varepsilon = 0{,}01$ по условию; ответ от ε не зависит):

$$\nu R\,dT = pV \cdot 0{,}5\varepsilon > 0.$$

Температура растёт: давление падает слабее, чем растёт объём, а $pV \propto T$.

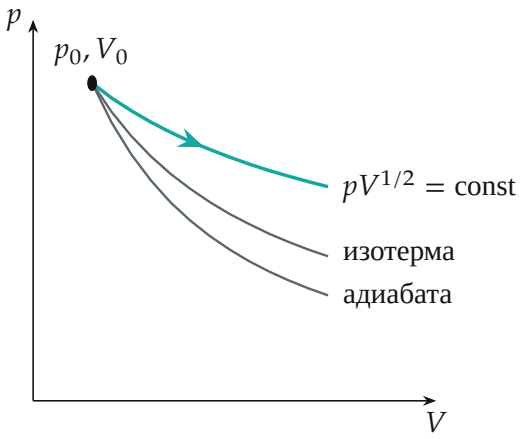
3. Тепло и теплоёмкость. Выразим всё в единицах $pV\varepsilon$:

$$\nu C_V\,dT = \frac{5}{2}\cdot 0{,}5\,pV\varepsilon = 1{,}25\,pV\varepsilon, \qquad p\,dV = pV\varepsilon,$$

$$dQ = (1{,}25 + 1)\,pV\varepsilon = 2{,}25\,pV\varepsilon.$$

Молярная теплоёмкость процесса по определению $C = \dfrac{dQ}{\nu\,dT}$:

$$C = \frac{2{,}25\,pV\varepsilon}{0{,}5\,pV\varepsilon/R} = 4{,}5R.$$



Процесс из задачи ($p \propto V^{-1/2}$, бирюзовая линия) идёт выше изотермы ($p \propto V^{-1}$): температура растёт; адиабата ($p \propto V^{-1,4}$) — ниже. Качественная иллюстрация, для одного начального состояния

Обратите внимание: теплоёмкость процесса не обязана лежать между C_V и C_p: здесь $C = 4{,}5R > C_p = \frac{7}{2}R$, потому что газ расширяется (работа положительна) и одновременно нагревается, причём на каждый градус нагрева моль газа совершает работу $2R$ — вдвое больше, чем при изобарном расширении (R).

Проверка. Второй способ: из $\dfrac{dp}{p} = -0{,}5\dfrac{dV}{V}$ следует $pV^{1/2} = \text{const}$, политропа с показателем $\frac{1}{2}$. Для политропы $pV^n = \text{const}$ молярная теплоёмкость $C = C_V + \dfrac{R}{1-n} = \frac{5}{2}R + \dfrac{R}{1-1/2} = \frac{5}{2}R + 2R = 4{,}5R$ — то же.

Предельные случаи формулы $C = C_V + \dfrac{R}{1 + (dp/p)/(dV/V)}$: изотерма $dp/p = -dV/V$ даёт $C \to \infty$, изобара ($dp = 0$) — $C_V + R = C_p$, изохора ($dV = 0$) — C_V.

Смысл: теплоёмкость процесса зависит от того, как соотносятся изменения давления и объёма; у этого процесса она больше любой «стандартной» теплоёмкости азота.

Ответ. $C = 4{,}5R$.